Invariantes de configuraciones de tuplas que conmutan

Seminario FCFM - MCTP

Angel R. Jiménez Cruz

Asesores: José Cantarero

Matías Navarro

10 Octubre 2019

$$Conf_k(X) = \{(x_1, ..., x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

$$Conf_k(X) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\} \subset X^k$$

Introducción

- Fadell y Neuwirth en 1962.
- Fibración de Fadell y Neuwirth:

$$Conf_{k-1}(X - \{x_1\}) \longrightarrow Conf_k(X) \longrightarrow X$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1$$

- E. Fadell, L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand., 10 1962, 111-118.

Introducción

- Fadell y Neuwirth en 1962.
- Fibración de Fadell y Neuwirth:

$$Conf_{k-1}(X - \{x_1\}) \longrightarrow Conf_k(X) \longrightarrow X$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1$$

- E. Fadell, L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand., **10** 1962, 111-118.

- Se relacionaron con los grupos de trenzas.
- Física, topología, geometría, sistemas dinámicos.

- Se relacionaron con los grupos de trenzas.
- Física, topología, geometría, sistemas dinámicos.

Introducción

G grupo de Lie.

$$Hom(\mathbb{Z}^k, G) = \{f : \mathbb{Z}^k \longrightarrow G \mid f \text{ es homomorfismo}\}$$

G grupo de Lie.

$$Hom(\mathbb{Z}^k, G) = \{f : \mathbb{Z}^k \longrightarrow G \mid f \text{ es homomorfismo}\}$$

G grupo de Lie.

$$
\begin{aligned}
Hom(\mathbb{Z}^k, G) &= \{f : \mathbb{Z}^k \longrightarrow G \mid f \text{ es homomorfismo}\} \\
&= \{(g_1, ..., g_k) \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i\}
\end{aligned}
$$

G grupo de Lie.

$$
\begin{aligned}
Hom(\mathbb{Z}^k, G) &= \{f : \mathbb{Z}^k \longrightarrow G \mid f \text{ es homomorfismo}\} \\
&= \{(g_1, \ldots, g_k) \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i\} \\
&\subset G^k
\end{aligned}
$$

Introducción

- Witten, 1982.
- Goldman, 1998.
- Componentes conexas.

- E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nuclear Phys. B 202 (1982) 253 - 316 MR668987.
- W. M. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. math. 93, 557-607(1998).

Introducción

- Witten, 1982.
- Goldman, 1998.
- Componentes conexas.

- E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nuclear Phys. B 202 (1982) 253 - 316 MR668987.
- W. M. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. math. 93, 557-607(1998).

Introducción

- Witten, 1982.
- Goldman, 1998.
- Componentes conexas.

- E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nuclear Phys. B 202 (1982) 253 - 316 MR668987.
- W. M. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. math. 93, 557-607(1998).

Introducción

- Adem y Cohen, 2007.
- Homología y cohomología.
- Grupo fundamental, K-teoría equivariante.

- A. Adem, F. Cohen, *Commuting elements and spaces of homomorphisms*, Math. Ann. 338 (2007), no. 3, 587-626.

Introducción

- Adem y Cohen, 2007.
- Homología y cohomología.
- Grupo fundamental, K-teoría equivariante.

- A. Adem, F. Cohen, *Commuting elements and spaces of homomorphisms*, Math. Ann. 338 (2007), no. 3, 587-626.

Introducción

- Adem y Cohen, 2007.
- Homología y cohomología.
- Grupo fundamental, K-teoría equivariante.

- A. Adem, F. Cohen, *Commuting elements and spaces of homomorphisms*, Math. Ann. 338 (2007), no. 3, 587-626.

Introducción

G grupo de Lie.

$Conf_k(G)$ $\qquad$ $Hom(\mathbb{Z}^k, G)$

$$\mathrm{Conf}_k^{\mathrm{ab}}(G) = \{(g_1, ..., g_k) \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i, \ g_i \neq g_j \text{ si } i \neq j\}$$

Introducción

G grupo de Lie.

$$Conf_k(G) \qquad\qquad Hom(\mathbb{Z}^k, G)$$

$$\mathrm{Conf}_k^{\mathrm{ab}}(G) = \{(g_1, ..., g_k) \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i,\ g_i \neq g_j \text{ si } i \neq j\}$$

Introducción

G grupo de Lie.

$$Conf_k(G) \qquad\qquad Hom(\mathbb{Z}^k, G)$$

$$\mathrm{Conf}_k^{\mathrm{ab}}(G) = \{(g_1, \ldots, g_k) \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i,\ \ g_i \neq g_j \text{ si } i \neq j\}$$

Introducción

Grupos de Lie que nos interesan:

- $U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I_n\}$
- $SU(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I_n,\ det(A) = 1\}$
- $Sp(n) = \{A \in M(n, \mathbb{H}) \mid A \cdot A^* = I_n\}$

- Compactos y conexos.
- Cada subgrupo abeliano está contenido en un toro maximal.

Introducción

Grupos de Lie que nos interesan:

- $U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I_n\}$
- $SU(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I_n,\ det(A) = 1\}$
- $Sp(n) = \{A \in M(n, \mathbb{H}) \mid A \cdot A^* = I_n\}$

- Compactos y conexos.
- Cada subgrupo abeliano está contenido en un toro maximal.

Introducción

Grupos de Lie que nos interesan:

- $U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I_n\}$
- $SU(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I_n,\ det(A) = 1\}$
- $Sp(n) = \{A \in M(n, \mathbb{H}) \mid A \cdot A^* = I_n\}$

- Compactos y conexos.
- Cada subgrupo abeliano está contenido en un toro maximal.

Motivación

- Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups
- D. Ramras y M. Stafa, Mayo, 2018.

$$r \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r))$$

$$H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r)); \mathbb{Q}) \cong H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r+1)); \mathbb{Q})$$

$$r >> 0$$

- D. A. Ramras, M. Stafa *Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups*, 2018, arXiv:math.AT/1805.01368v1.

Motivación

- Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups
- D. Ramras y M. Stafa, Mayo, 2018.

$$r \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r))$$

$$H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r)); \mathbb{Q}) \cong H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r+1)); \mathbb{Q})$$

$$r >> 0$$

- D. A. Ramras, M. Stafa *Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups*, 2018, arXiv:math.AT/1805.01368v1.

Motivación

- Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups
- D. Ramras y M. Stafa, Mayo, 2018.

$$r \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r))$$

$$H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r)); \mathbb{Q}) \cong H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r+1)); \mathbb{Q})$$

$$r >> 0$$

- D. A. Ramras, M. Stafa *Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups*, 2018, arXiv:math.AT/1805.01368v1.

Motivación

"It would be interesting to know whether stability holds for configurations of commuting elements in G."

Objetivo

Calcular invariantes homotópicos del espacio $\mathrm{Conf}_k^{ab}(G)$ con G uno de los grupos topológicos clásicos $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- Si G es un grupo de Lie compacto y conexo tal que cada S subgrupo abeliano está contenido en un toro maximal T de dimensión mayor o igual a 2 entonces

$\mathrm{Conf}_k^{ab}(G)$ es conexo

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- Si G es un grupo de Lie compacto y conexo tal que cada S subgrupo abeliano está contenido en un toro maximal T de dimensión mayor o igual a 2 entonces

$$\mathrm{Conf}_k^{ab}(G) \text{ es conexo}$$

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- $U(n)$ y $Sp(n)$ satisfacen las condiciones anteriores si $n \geq 2$.
- $SU(n)$ las satisface si $n \geq 3$.
- Quedan los casos $U(1) \cong S^1$ y $SU(2) \cong Sp(1)$.

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- $U(n)$ y $Sp(n)$ satisfacen las condiciones anteriores si $n \geq 2$.
- $SU(n)$ las satisface si $n \geq 3$.
- Quedan los casos $U(1) \cong S^1$ y $SU(2) \cong Sp(1)$.

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- $U(n)$ y $Sp(n)$ satisfacen las condiciones anteriores si $n \geq 2$.
- $SU(n)$ las satisface si $n \geq 3$.
- Quedan los casos $U(1) \cong S^1$ y $SU(2) \cong Sp(1)$.

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- $\mathrm{Conf}_k^{ab}(S^1) = \mathrm{Conf}_k(S^1)$ tiene $(k-1)!$ componentes conexas.

$$\begin{aligned} \Phi : SU(2) \times \mathrm{Conf}_k(S^1) &\longrightarrow \mathrm{Conf}_k^{ab}(SU(2)) \\ (g, (t_1, \ldots, t_k)) &\mapsto (gt_1g^{-1}, \ldots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

- $\mathrm{Conf}_k^{ab}(SU(2))$ tiene $\frac{(k-1)!}{2}$ componentes conexas.

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- $\mathrm{Conf}_k^{ab}(S^1) = \mathrm{Conf}_k(S^1)$ tiene $(k-1)!$ componentes conexas.

$$\Phi : SU(2) \times \mathrm{Conf}_k(S^1) \longrightarrow \mathrm{Conf}_k^{ab}(SU(2))$$
$$(g, (t_1, \ldots, t_k)) \mapsto (gt_1g^{-1}, \ldots, gt_kg^{-1})$$

- $\mathrm{Conf}_k^{ab}(SU(2))$ tiene $\frac{(k-1)!}{2}$ componentes conexas.

$\pi_0(\mathrm{Conf}_k^{ab}(G))$.

- $\mathrm{Conf}_k^{ab}(S^1) = \mathrm{Conf}_k(S^1)$ tiene $(k-1)!$ componentes conexas.

$$\begin{aligned} \Phi : SU(2) \times \mathrm{Conf}_k(S^1) &\longrightarrow \mathrm{Conf}_k^{ab}(SU(2)) \\ (g, (t_1, \ldots, t_k)) &\mapsto (gt_1g^{-1}, \ldots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

- $\mathrm{Conf}_k^{ab}(SU(2))$ tiene $\frac{(k-1)!}{2}$ componentes conexas.

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

Cohomología (Baird, 2007):

- *Sea G un grupo de Lie compacto, conexo y con toro maximal T, actuando en un espacio paracompacto de Hausdorff X. Sea también F un campo tal que $char(F)$ no divide a $\# W_G$ y supongamos además que para cada $x \in X$, G_x contiene un toro maximal de G. Entonces*

$$H^*(X; F) \cong H^*(G/T \times X^T; F)^{W_G}$$

- T. Baird, *Cohomology of the space of commuting n-tuples in a compact Lie group*, Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), 737-754.

Cohomología (Baird, 2007):

- *Sea G un grupo de Lie compacto, conexo y con toro maximal T, actuando en un espacio paracompacto de Hausdorff X. Sea también F un campo tal que char(F) no divide a $\#W_G$ y supongamos además que para cada $x \in X$, G_x contiene un toro maximal de G. Entonces*

$$H^*(X;F) \cong H^*(G/T \times X^T;F)^{W_G}$$

- T. Baird, *Cohomology of the space of commuting n-tuples in a compact Lie group*, Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), 737-754.

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

- $H^n(Conf_k^{ab}(G); \mathbb{Q}) \cong H^n(G/T \times Conf_k(T); \mathbb{Q})^{W_G}$

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

$$H^n(Conf_2^{ab}(SU(2));\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0, 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

- $Conf_2^{ab}(SU(2)) \simeq SU(2) \cong S^3$

$$
\begin{aligned}
f : Conf_2^{ab}(SU(2)) &\longrightarrow SU(2) \\
(A, B) &\mapsto A \\
g : SU(2) &\longrightarrow Conf_2^{ab}(SU(2)) \\
A &\mapsto (A, -A)
\end{aligned}
$$

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

- $Conf_2^{ab}(SU(2)) \simeq SU(2) \cong S^3$

$$
\begin{aligned}
f : Conf_2^{ab}(SU(2)) &\longrightarrow SU(2) \\
(A, B) &\mapsto A \\
g : SU(2) &\longrightarrow Conf_2^{ab}(SU(2)) \\
A &\mapsto (A, -A)
\end{aligned}
$$

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

$$Conf_k^{ab}(SU(2)) \simeq \coprod_{(k-1)!/2} S^2 \times S^1 \quad k \geq 3$$

$H^n(Conf_k(G))$.

$$H^n(Conf_2^{ab}(U(2));\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n=0 \\ \mathbb{Q}^2 & \text{si } n=1,2 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } n=3,4 \\ \mathbb{Q} & \text{si } n=5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$H^n(Conf_k(G))$.

$$H^n(Conf_3^{ab}(U(2)); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Q}^8 & \text{si } n = 2 \\ \mathbb{Q}^9 & \text{si } n = 3, 4 \\ \mathbb{Q}^7 & \text{si } n = 5 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } n = 6 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$H^n(Conf_k(G))$.

$$
\begin{aligned}
H^2(Conf_3^{ab}(U(2))) \cong & [H^2(U(2)/T \times Conf_3(T))]^W \\
\cong & [H^0(U(2)/T) \otimes H^2(Conf_3(T)) \\
& \oplus H^2(U(2)/T) \otimes H^0(Conf_3(T))]^W
\end{aligned}
$$

- Fibración de Fadell y Neuwirth.
- Presentación del grupo fundamental de $Conf_3(T)$ dado por Birman.
- Sucesión de Mayer - Vietoris en cohomología con coeficientes locales.
- Espacios clasificantes.

$H^n(Conf_k(G))$.

$$\begin{aligned} H^2(Conf_3^{ab}(U(2))) \cong & [H^2(U(2)/T \times Conf_3(T))]^W \\ \cong & [H^0(U(2)/T) \otimes H^2(Conf_3(T)) \\ & \oplus H^2(U(2)/T) \otimes H^0(Conf_3(T))]^W \end{aligned}$$

- Fibración de Fadell y Neuwirth.
- Presentación del grupo fundamental de $Conf_3(T)$ dado por Birman.
- Sucesión de Mayer - Vietoris en cohomología con coeficientes locales.
- Espacios clasificantes.

$H^n(Conf_k(G))$.

$$
\begin{aligned}
H^2(Conf_3^{ab}(U(2))) \cong & [H^2(U(2)/T \times Conf_3(T))]^W \\
\cong & [H^0(U(2)/T) \otimes H^2(Conf_3(T)) \\
& \oplus H^2(U(2)/T) \otimes H^0(Conf_3(T))]^W
\end{aligned}
$$

- Fibración de Fadell y Neuwirth.
- Presentación del grupo fundamental de $Conf_3(T)$ dado por Birman.
- Sucesión de Mayer - Vietoris en cohomología con coeficientes locales.
- Espacios clasificantes.

$H^n(Conf_k(G))$.

$$
\begin{aligned}
H^2(Conf_3^{ab}(U(2))) \cong & [H^2(U(2)/T \times Conf_3(T))]^W \\
\cong & [H^0(U(2)/T) \otimes H^2(Conf_3(T)) \\
& \oplus H^2(U(2)/T) \otimes H^0(Conf_3(T))]^W
\end{aligned}
$$

- Fibración de Fadell y Neuwirth.
- Presentación del grupo fundamental de $Conf_3(T)$ dado por Birman.
- Sucesión de Mayer - Vietoris en cohomología con coeficientes locales.
- Espacios clasificantes.

$H^n(Conf_k(G))$.

$$\begin{aligned} H^2(Conf_3^{ab}(U(2))) &\cong [H^2(U(2)/T \times Conf_3(T))]^W \\ &\cong [H^0(U(2)/T) \otimes H^2(Conf_3(T)) \\ &\quad \oplus H^2(U(2)/T) \otimes H^0(Conf_3(T))]^W \end{aligned}$$

- Fibración de Fadell y Neuwirth.
- Presentación del grupo fundamental de $Conf_3(T)$ dado por Birman.
- Sucesión de Mayer - Vietoris en cohomología con coeficientes locales.
- Espacios clasificantes.

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

- $H_1(Conf_k^{ab}(SU(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, SU(n))) = 0 \quad n \geq 4$
- $H_1(Conf_k^{ab}(Sp(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, Sp(n))) = 0 \quad n \geq 3$
- $H_1(Conf_k^{ab}(U(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, U(n))) = 0 \quad n \geq 3$

$$H_1(Conf_k^{ab}(SU(n))) \cong H_1(Conf_k^{ab}(SU(n+1))) \quad n \geq 4$$

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

- $H_1(Conf_k^{ab}(SU(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, SU(n))) = 0 \quad n \geq 4$
- $H_1(Conf_k^{ab}(Sp(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, Sp(n))) = 0 \quad n \geq 3$
- $H_1(Conf_k^{ab}(U(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, U(n))) = 0 \quad n \geq 3$

$$H_1(Conf_k^{ab}(SU(n))) \cong H_1(Conf_k^{ab}(SU(n+1))) \quad n \geq 4$$

Motivación

- Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups
- D. Ramras y M. Stafa, Mayo, 2018.

$$H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r)); \mathbb{Q}) \cong H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r+1)); \mathbb{Q})$$

$$r >> 0$$

D. A. Ramras, M. Stafa *Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups*, 2018, arXiv:math.AT/1805.01368v1.

$H^n(Conf_k^{ab}(G))$.

- $H_1(Conf_k^{ab}(SU(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, SU(n))) = 0 \quad n \geq 4$
- $H_1(Conf_k^{ab}(Sp(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, Sp(n))) = 0 \quad n \geq 3$
- $H_1(Conf_k^{ab}(U(n))) \cong H_1(Hom(\mathbb{Z}^k, U(n))) = 0 \quad n \geq 3$

$$H_1(Conf_k^{ab}(SU(n))) \cong H_1(Conf_k^{ab}(SU(n+1))) \quad n \geq 4$$

Estabilidad homológica.

- Si X es una variedad topológica conexa y sin borde de dimensión $n \geq 2$, entonces la inclusión $Conf_k(X) \longrightarrow X^k$ induce un isomorfismo en homología en dimensiones menores o iguales a $n-2$.

- M. Golasiński, L. Gonçalves, J. Guaschi, *On the homotopy fibre of the inclusion map* $F_n(X) \longrightarrow \prod_1^n X$ *for some orbit spaces* X., Bol. Soc. Mat. Mex (2017), 23:457-485.

Estabilidad homológica.

- Si el rango de G es $n \geq 2$, entonces la inclusión

$$Conf_k^{ab}(G) \longrightarrow Hom(\mathbb{Z}^k, G)$$

induce un isomorfismo en homología en dimensiones menores o iguales a $n - 2$.

Estabilidad homológica.

$G_r = U(r), SU(r+1), Sp(r)$.

- $r \mapsto H_n(Conf_k^{ab}(G_r);\mathbb{Q})$
- $r \mapsto H_n(Hom(\mathbb{Z}^k, G_r);\mathbb{Q})$

son homológicamente estables.

$$H_n(Conf_k^{ab}(G_1);\mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_2);\mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_3);\mathbb{Q})$$

Estabilidad homológica.

$G_r = U(r), SU(r+1), Sp(r).$

- $r \mapsto H_n(Conf_k^{ab}(G_r); \mathbb{Q})$
- $r \mapsto H_n(Hom(\mathbb{Z}^k, G_r); \mathbb{Q})$

son homológicamente estables.

$$H_n(Conf_k^{ab}(G_1); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_2); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_3); \mathbb{Q})$$

Estabilidad homológica.

$G_r = U(r), SU(r+1), Sp(r)$.

- $r \mapsto H_n(Conf_k^{ab}(G_r); \mathbb{Q})$
- $r \mapsto H_n(Hom(\mathbb{Z}^k, G_r); \mathbb{Q})$

son homológicamente estables.

$$H_n(Conf_k^{ab}(G_1); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_2); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_3); \mathbb{Q})$$

Estabilidad homológica.

$$G_r = U(r), SU(r+1), Sp(r).$$

- $r \mapsto H_n(Conf_k^{ab}(G_r); \mathbb{Q})$
- $r \mapsto H_n(Hom(\mathbb{Z}^k, G_r); \mathbb{Q})$

son homológicamente estables.

$$H_n(Conf_k^{ab}(G_1); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_2); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_3); \mathbb{Q})$$

Estabilidad homológica.

$$G_r = U(r), SU(r+1), Sp(r).$$

- $r \mapsto H_n(Conf_k^{ab}(G_r); \mathbb{Q})$
- $r \mapsto H_n(Hom(\mathbb{Z}^k, G_r); \mathbb{Q})$

son homológicamente estables.

$$H_n(Conf_k^{ab}(G_1); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_2); \mathbb{Q}) \to H_n(Conf_k^{ab}(G_3); \mathbb{Q})$$

Estabilidad uniforme por representaciones:

$$H^n(Conf_1(T);\mathbb{Q}) \to H^n(Conf_2(T);\mathbb{Q}) \to H^n(Conf_3(T);\mathbb{Q})$$

Estabilidad uniforme por representaciones:

$$H^n(Conf_1(T);\mathbb{Q}) \to H^n(Conf_2(T);\mathbb{Q}) \to H^n(Conf_3(T);\mathbb{Q})$$

Estabilidad homológica.

Teorema: (Church, 2011) $r \mapsto H^m(Conf_r(T);\mathbb{Q})$ es uniformemente estable por representaciones.

- $r \mapsto H^m(Conf_r^{ab}(G);\mathbb{Q})$ son uniformemente estables por representaciones para un grupo de Lie compacto y conexo.
- $Conf_r^{ab}(G)/S_r$.
- $\{H^m(Conf_r^{ab}(G)/S_r;\mathbb{Q})\}_{r\geq 1}$ estabilizan.

Estabilidad homológica.

Teorema: (Church, 2011) $r \mapsto H^m(Conf_r(T);\mathbb{Q})$ es uniformemente estable por representaciones.

- $r \mapsto H^m(Conf_r^{ab}(G);\mathbb{Q})$ son uniformemente estables por representaciones para un grupo de Lie compacto y conexo.
- $Conf_r^{ab}(G)/S_r$.
- $\{H^m(Conf_r^{ab}(G)/S_r;\mathbb{Q})\}_{r\geq 1}$ estabilizan.

Estabilidad homológica.

Teorema: (Church, 2011) $r \mapsto H^m(Conf_r(T); \mathbb{Q})$ es uniformemente estable por representaciones.

- $r \mapsto H^m(Conf_r^{ab}(G); \mathbb{Q})$ son uniformemente estables por representaciones para un grupo de Lie compacto y conexo.
- $Conf_r^{ab}(G)/S_r$.
- $\{H^m(Conf_r^{ab}(G)/S_r; \mathbb{Q})\}_{r\geq 1}$ estabilizan.

Estabilidad homológica.

Teorema: (Church, 2011) $r \mapsto H^m(Conf_r(T); \mathbb{Q})$ es uniformemente estable por representaciones.

- $r \mapsto H^m(Conf_r^{ab}(G); \mathbb{Q})$ son uniformemente estables por representaciones para un grupo de Lie compacto y conexo.
- $Conf_r^{ab}(G)/S_r$.
- $\{H^m(Conf_r^{ab}(G)/S_r; \mathbb{Q})\}_{r\geq 1}$ estabilizan.

Muchas gracias.

=)

Referencias.

- A. Adem, F. Cohen, *Commuting elements and spaces of homomorphisms*, Math. Ann. 338 (2007), no. 3, 587-626.
- D. Ramras, M. Stafa *Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups*, 2018, arXiv:math.AT/1805.01368v1.
- E. Torres, D. Sjerve, *Fundamental groups of commuting elements in Lie groups*, Bulletin of the London Mathematical Society, 40(1):65-76, 2008.

Referencias.

- E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nuclear Phys. B 202 (1982) 253 - 316 MR668987.
- J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 1974.
- J. Birman, *On Braid Groups*, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969) 41–72.

Referencias.

- J. Gómez, A. Pettet, J. Souto, *On the fundamental group of $Hom(\mathbb{Z}^k, G)$*, Math. Z. (2012) 271 : 33 – 44.
- T. Baird, *Cohomology of the space of commuting n-tuples in a compact Lie group*, Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), 737-754.
- V. Hansen, *Braids and coverings: selected topics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.