Los grupos de Lie y la mecánica cuántica

Una aventura en el mundo de simetrías

Matthew Dawson

Coloquio Matemáticas y Física UNACH
CONACYT—CIMAT Unidad Mérida

“La Irrazonable Eficacia de las Matemáticas” (1960)

Eugene Wigner (1902–1995)

- ¿Por qué sirven las matemáticas en la física y en otras ciencias? ¿Es algo que debe sorprendernos?
- ¿Son únicos nuestros modelos matemáticos?
- “Estamos en la posición de alguien a quien le dieron un manojo de llaves y quien, teniendo que abrir varias puertas en seguida, siempre escoge la llave correcta en el primer o segundo intento. Se volvió escéptico en cuanto a la unicidad de la coordinación entre llaves y puertas.”
- “. . . el hecho de que tantas teorías las cuales sabemos que son falsos den lugar a resultados tan precisos es un factor adverso.”

“La Irrazonable Eficacia de las Matemáticas” (1960)

Eugene Wigner (1902–1995)

- ¿Por qué sirven las matemáticas en la física y en otras ciencias? ¿Es algo que debe sorprendernos?
- ¿Son únicos nuestros modelos matemáticos?
- “Estamos en la posición de alguien a quien le dieron un manojo de llaves y quien, teniendo que abrir varias puertas en seguida, siempre escoge la llave correcta en el primer o segundo intento. Se volvió escéptico en cuanto a la unicidad de la coordinación entre llaves y puertas.”
- “. . . el hecho de que tantas teorías las cuales sabemos que son falsos den lugar a resultados tan precisos es un factor adverso.”

Eugene Wigner (1902–1995)

- ¿Por qué sirven las matemáticas en la física y en otras ciencias? ¿Es algo que debe sorprendernos?
- ¿Son únicos nuestros modelos matemáticos?
- "Estamos en la posición de alguien a quien le dieron un manojo de llaves y quien, teniendo que abrir varias puertas en seguida, siempre escoge la llave correcta en el primer o segundo intento. Se volvió escéptico en cuanto a la unicidad de la coordinación entre llaves y puertas."
- "...el hecho de que tantas teorías las cuales sabemos que son falsos den lugar a resultados tan precisos es un factor adverso."

“La Irrazonable Eficacia de las Matemáticas” (1960)

Eugene Wigner (1902–1995)

- ¿Por qué sirven las matemáticas en la física y en otras ciencias? ¿Es algo que debe sorprendernos?
- ¿Son únicos nuestros modelos matemáticos?
- “Estamos en la posición de alguien a quien le dieron un manojo de llaves y quien, teniendo que abrir varias puertas en seguida, siempre escoge la llave correcta en el primer o segundo intento. Se volvió escéptico en cuanto a la unicidad de la coordinación entre llaves y puertas.”
- “. . . el hecho de que tantas teorías las cuales sabemos que son falsos den lugar a resultados tan precisos es un factor adverso.”

- “...sin principios de invariancia parecidas a las que salen de una generalización de las observaciones de Galileo, la física no sería posible.”
- En 1948, Eugene Wigner clasificó las representaciones unitarias irreducibles de energía positiva, dando lugar a la clasificación de partículas por espín y masa.

“La Irrazonable Eficacia de las Matemáticas” (1960)

- “. . . sin principios de invariancia parecidas a las que salen de una generalización de las observaciones de Galileo, la física no sería posible.”
- En 1948, Eugene Wigner clasificó las representaciones unitarias irreducibles de energía positiva, dando lugar a la clasificación de partículas por espín y masa.

Una Vuelta Hacia Atrás

Sophus Lie
(1842–1899)

- Inventó los **grupos de Lie** para estudiar las simetrías de ecuaciones diferenciales.
- Un grupo de Lie es una variedad suave que también es un grupo, donde el producto y la inversión del grupo son mapeos suaves.
- Básicamente son "familias continuas de simetrías".

Una Vuelta Hacia Atrás

Sophus Lie
(1842–1899)

- Inventó los **grupos de Lie** para estudiar las simetrías de ecuaciones diferenciales.
- Un grupo de Lie es una variedad suave que también es un grupo, donde el producto y la inversión del grupo son mapeos suaves.
- Básicamente son "familias continuas de simetrías".

Una Vuelta Hacia Atrás

Sophus Lie
(1842–1899)

- Inventó los **grupos de Lie** para estudiar las simetrías de ecuaciones diferenciales.
- Un grupo de Lie es una variedad suave que también es un grupo, donde el producto y la inversión del grupo son mapeos suaves.
- Básicamente son "familias continuas de simetrías".

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones

- Traslación de $\mathbb{R}$ por un número real a:

$$\tau_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\tau_a(x) = x + a$$

- Hacer dos traslaciones consecutivas produce otra traslación:

$$\tau_a(\tau_b(x)) = \tau_a(x + b) = x + b + a$$
$$= \tau_{a+b}(x)$$

- De hecho, escribimos:

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$$

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones

- Traslación de $\mathbb{R}$ por un número real a:

$$\begin{aligned} \tau_a &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \tau_a(x) &= x + a \end{aligned}$$

- Hacer dos traslaciones consecutivas produce otra traslación:

$$\begin{aligned} \tau_a(\tau_b(x)) = \tau_a(x+b) &= x + b + a \\ &= \tau_{a+b}(x) \end{aligned}$$

- De hecho, escribimos:

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$$

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones

- Traslación de $\mathbb{R}$ por un número real a:

$$\tau_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\tau_a(x) = x + a$$

- Hacer dos traslaciones consecutivas produce otra traslación:

$$\begin{aligned} \tau_a(\tau_b(x)) &= \tau_a(x+b) = x + b + a \\ &= \tau_{a+b}(x) \end{aligned}$$

- De hecho, escribimos:

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$$

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones

- No hacer nada es una traslación:

$$\tau_0(x) = x$$

$$\tau_0 \circ \tau_a = \tau_a \circ \tau_0 = \tau_a$$

- Se puede deshacer una traslación mediante otra traslación:

$$\tau_{-a}(\tau_a(x)) = x + a - a = x$$

- No necesitamos paréntasis para componer tres o más traslaciones:

$$(\tau_a \circ \tau_b) \circ \tau_c = \tau_{a+b+c} = \tau_a \circ (\tau_b \circ \tau_c)$$

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones

- No hacer nada es una traslación:

$$\tau_0(x) = x$$

$$\tau_0 \circ \tau_a = \tau_a \circ \tau_0 = \tau_a$$

- Se puede deshacer una traslación mediante otra traslación:

$$\tau_{-a}(\tau_a(x)) = x + a - a = x$$

- No necesitamos paréntasis para componer tres o más traslaciones:

$$(\tau_a \circ \tau_b) \circ \tau_c = \tau_{a+b+c} = \tau_a \circ (\tau_b \circ \tau_c)$$

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones

- No hacer nada es una traslación:

$$\tau_0(x) = x$$

$$\tau_0 \circ \tau_a = \tau_a \circ \tau_0 = \tau_a$$

- Se puede deshacer una traslación mediante otra traslación:

$$\tau_{-a}(\tau_a(x)) = x + a - a = x$$

- No necesitamos paréntasis para componer tres o más traslaciones:

$$(\tau_a \circ \tau_b) \circ \tau_c = \tau_{a+b+c} = \tau_a \circ (\tau_b \circ \tau_c)$$

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones

- Realmente las “traslaciones” son los números reales en disfraz:

$$a \leftrightarrow \tau_a$$

y tenemos

$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$$

- Decimos que el grupo de las traslaciones es **isomorfo** a $\mathbb{R}$.

Ejemplos de Simetrías: Rotaciones

- Las rotaciones del plano $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{SO}(2)$
- Las rotaciones del espacio $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{SO}(3)$
- De hecho, las rotaciones preservan el producto punto de vectores: si $T \in \mathrm{SO}(3)$ y si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ son vectores, entonces:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v})$$

- Las transformaciones que preservan el producto punto se llaman **transformaciones ortogonales** y forman los grupos $\mathrm{O}(2), \mathrm{O}(3)$, etc. (incluyen simetrías de espejo que no son rotaciones)

Ejemplos de Simetrías: Rotaciones

- Las rotaciones del plano $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{SO}(2)$
- Las rotaciones del espacio $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{SO}(3)$
- De hecho, las rotaciones preservan el producto punto de vectores: si $T \in \mathrm{SO}(3)$ y si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ son vectores, entonces:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v})$$

- Las transformaciones que preservan el producto punto se llaman **transformaciones ortogonales** y forman los grupos $\mathrm{O}(2), \mathrm{O}(3)$, etc. (incluyen simetrías de espejo que no son rotaciones)

- En general, las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ siempre son mapeos lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.
- Se representan con matrices $n \times n$ reales.
- De hecho:

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I\}$$

- Las rotaciones son las transformaciones ortogonales sin reflexiones:

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I \text{ ý } \det X = 1\}$$

Más sobre las rotaciones

- En general, las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ siempre son mapeos lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.
- Se representan con matrices $n \times n$ reales.
- De hecho:

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I\}$$

- Las rotaciones son las transformaciones ortogonales sin reflexiones:

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I \text{ ý } \det X = 1\}$$

Más sobre las rotaciones

- En general, las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ siempre son mapeos lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.
- Se representan con matrices $n \times n$ reales.
- De hecho:

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I\}$$

- Las rotaciones son las transformaciones ortogonales sin reflexiones:

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I \text{ ý } \det X = 1\}$$

Más sobre las rotaciones

- En general, las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ siempre son mapeos lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.
- Se representan con matrices $n \times n$ reales.
- De hecho:

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I\}$$

- Las rotaciones son las transformaciones ortogonales sin reflexiones:

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T X = I \text{ ý } \det X = 1\}$$

Ejemplos de Simetrías: Traslaciones en $\mathbb{R}^3$

- Traslación de $\mathbb{R}^3$ por un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$\tau_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\tau_{\mathbf{a}}(x, y, z) = (x + a_1, y + a_2, z + a_3).$$

- De hecho, se puede demostrar que

$$\tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}} = \tau_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$$

- ¡Las traslaciones de $\mathbb{R}^3$ representan una copia de los vectores $\mathbb{R}^3$ en disfraz!

Un Producto Semidirecto

- Se puede combinar traslaciones con rotaciones para obtener un nuevo grupo:

$$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}(3) = \{\tau_{\mathbf{a}} \circ r \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } r \in \mathrm{SO}(3)\}$$

- Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$(\tau_{\mathbf{a}} \circ r)(\mathbf{v}) = r(\mathbf{v}) + \mathbf{a}$$

- En general,

$$\tau_a \circ r \neq r \circ \tau_a$$

- ¡Tenemos un grupo **no conmutativo**!

Un Producto Semidirecto

- Se puede combinar traslaciones con rotaciones para obtener un nuevo grupo:

$$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}(3) = \{\tau_{\mathbf{a}} \circ r \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } r \in \mathrm{SO}(3)\}$$

- Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$(\tau_{\mathbf{a}} \circ r)(\mathbf{v}) = r(\mathbf{v}) + \mathbf{a}$$

- En general,

$$\tau_a \circ r \neq r \circ \tau_a$$

- ¡Tenemos un grupo **no conmutativo**!

Un Producto Semidirecto

- Se puede combinar traslaciones con rotaciones para obtener un nuevo grupo:

$$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}(3) = \{\tau_{\mathbf{a}} \circ r \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } r \in \mathrm{SO}(3)\}$$

- Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$(\tau_{\mathbf{a}} \circ r)(\mathbf{v}) = r(\mathbf{v}) + \mathbf{a}$$

- En general,

$$\tau_a \circ r \neq r \circ \tau_a$$

- ¡Tenemos un grupo **no conmutativo**!

Un Producto Semidirecto

- Se puede combinar traslaciones con rotaciones para obtener un nuevo grupo:

$$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}(3) = \{\tau_{\mathbf{a}} \circ r \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } r \in \mathrm{SO}(3)\}$$

- Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$(\tau_{\mathbf{a}} \circ r)(\mathbf{v}) = r(\mathbf{v}) + \mathbf{a}$$

- En general,

$$\tau_a \circ r \neq r \circ \tau_a$$

- ¡Tenemos un grupo **no conmutativo**!

- El espaciotiempo consiste en todas las comnbinaciones de tiempo y ubicación espacial:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^4 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ &= \{(t, x, y, z) \mid t, x, y, z \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

- Las leyes de la física deben quedar invariantes bajo traslaciones temporales, traslaciones espaciales y rotaciones espaciales:

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}(3))$$

Simetrías del Espaciotiempo

- Relatividad Según Galileo: también las leyes de la física deben estar invariantes bajo una traslación de velocidades (sólo las velocidades relativas son importantes).
- Relatividad Según Einstein: la velocidad de la luz c es la misma en cada marco de referencia. (Vamos a poner $c = 1$.)

- Relatividad Según Galileo: también las leyes de la física deben estar invariantes bajo una traslación de velocidades (sólo las velocidades relativas son importantes).
- Relatividad Según Einstein: la velocidad de la luz c es la misma en cada marco de referencia. (Vamos a poner $c = 1$.)

- Relatividad Según Galileo: también las leyes de la física deben estar invariantes bajo una traslación de velocidades (sólo las velocidades relativas son importantes).
- Relatividad Según Einstein: la velocidad de la luz c es la misma en cada marco de referencia. (Vamos a poner $c = 1$.)

- Producto interno de Minkowski:

$$\langle v, w \rangle = t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

si $v = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ y $w = (t_2, x_2, y_2, z_2)$

- En particular:

$$\langle v, v \rangle = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

donde $v = (t, x, y, z)$.

- Si $v \neq 0$, se puede tener $\langle v, v \rangle > 0$ (vector temporal), $\langle v, v \rangle < 0$ (vector espacial) o incluso $\langle v, v \rangle = 0$ (vector nulo)

- Producto interno de Minkowski:

$$\langle v, w\rangle = t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

si $v = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ y $w = (t_2, x_2, y_2, z_2)$

- En particular:

$$\langle v, v\rangle = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

donde $v = (t, x, y, z)$.

- Si $v \neq 0$, se puede tener $\langle v, v\rangle > 0$ (vector temporal), $\langle v, v\rangle < 0$ (vector espacial) o incluso $\langle v, v\rangle = 0$ (vector nulo)

- Producto interno de Minkowski:

$$\langle v, w \rangle = t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

si $v = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ y $w = (t_2, x_2, y_2, z_2)$

- En particular:

$$\langle v, v \rangle = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

donde $v = (t, x, y, z)$.

- Si $v \neq 0$, se puede tener $\langle v, v \rangle > 0$ (vector temporal), $\langle v, v \rangle < 0$ (vector espacial) o incluso $\langle v, v \rangle = 0$ (vector nulo)

- En la relatividad especial, todas las leyes de la física deben quedar invariantes bajo el grupo de las transformaciones de $\mathbb{R}^4$ que preservan el producto interno de Minkowski:

$$\mathrm{O}(1,3)$$

- De hecho, a veces nos enfocamos en el grupo conexo

$$\mathrm{SO}^+(1,3)$$

que no tiene ni inversiones del tiempo ni inversiones del espacio.

- En la relatividad especial, todas las leyes de la física deben quedar invariantes bajo el grupo de las transformaciones de $\mathbb{R}^4$ que preservan el producto interno de Minkowski:

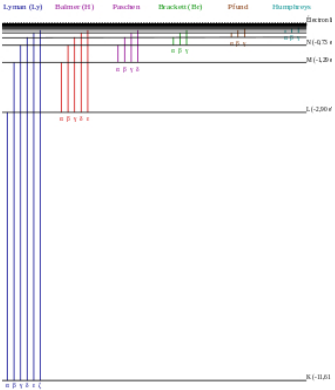
$$\mathrm{O}(1,3)$$

- De hecho, a veces nos enfocamos en el grupo conexo

$$\mathrm{SO}^+(1,3)$$

que no tiene ni inversiones del tiempo ni inversiones del espacio.

El Espectro del Hidrógeno



- Los electrones en los átomos de hidrógeno sólo emiten luz a ciertas longitudes de onda:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

  donde n y m son enteros con $m < n$, λ es la longitud de la onda emitida y R es una constante.

- ¡Los electrónes sólo tiene energías discretas!

Dos Perspectivas

- Planck: Un fotón con longitud de onda λ tiene energía

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

- De Broglie: una partícula con masa m y velocidad v debe formar una onda de longitud $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$, donde $p = mv$ es el momento de la particula.
- Entonces debemos tener una *función de onda*:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-\frac{2\pi i}{h}Et + \frac{2\pi i}{h}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.$$

- De hecho, $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi(t, x)$, donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
- Además, $-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = p_i\psi(t, x)$ para $i = 1, 2, 3$.

Dos Perspectivas

- Planck: Un fotón con longitud de onda λ tiene energía

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

- De Broglie: una partícula con masa m y velocidad v debe formar una onda de longitud $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$, donde $p = mv$ es el momento de la particula.
- Entonces debemos tener una *función de onda*:

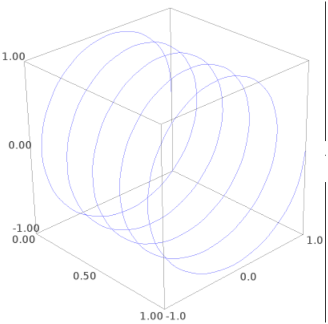
$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-\frac{2\pi i}{h}Et + \frac{2\pi i}{h}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.$$

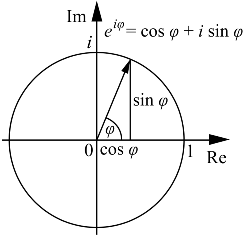
- De hecho, $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi(t, x)$, donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
- Además, $-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = p_i\psi(t, x)$ para $i = 1, 2, 3$.

Las armonías elementales

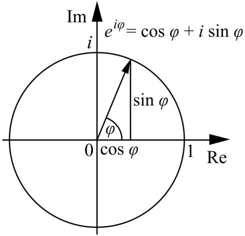
- Recordar: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ (si $\theta \in \mathbb{R}$).
- Las armonías elementales son las funciones

$$
\begin{aligned}
e_y : \mathbb{R} &\to \mathbb{C}, y \in \mathbb{R} \\
x &\mapsto e^{2\pi i y x} = \cos(2\pi y x) + i \operatorname{sen}(2\pi y x)
\end{aligned}
$$

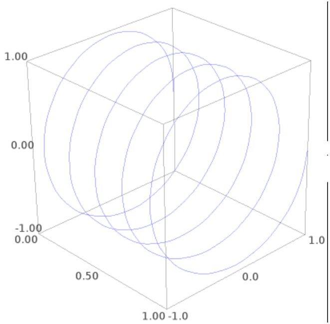




- Recordar: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ (si $\theta \in \mathbb{R}$).
- Las armonías elementales son las funciones



$$
\begin{aligned}
e_y : \mathbb{R} &\to \mathbb{C},\ y \in \mathbb{R} \\
x &\mapsto e^{2\pi i y x} = \cos(2\pi y x) + i\,\mathrm{sen}(2\pi y x)
\end{aligned}
$$



Dos Perspectivas

- Fórmula clásica para la energía total de una partícula:

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

donde m es su masa, x es su posición, y p es su momento.

- Schrödinger: $p_i \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$, dando la ecuación diferencial:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Dos Perspectivas

- Heisenberg: momento y posición deben ser matrices p y q que satisfacen:

$$pq - qp = i\hbar$$

- Tanto Heisenberg como Schrödinger predicen el espectro del Hidrógeno correctamente.
- ¿Cuál es la perspectiva correcta?

Dos Perspectivas

- Heisenberg: momento y posición deben ser matrices p y q que satisfacen:
$$pq - qp = i\hbar$$
- Tanto Heisenberg como Schrödinger predicen el espectro del Hidrógeno correctamente.
- ¿Cuál es la perspectiva correcta?

Dos Perspectivas

- Heisenberg: momento y posición deben ser matrices p y q que satisfacen:

$$pq - qp = i\hbar$$

- Tanto Heisenberg como Schrödinger predicen el espectro del Hidrógeno correctamente.
- ¿Cuál es la perspectiva correcta?

Una Formalización

John von Neumann (1903–1957)

Paul A. M. Dirac (1902–1984)

Espacios Vectoriales Complejos

- Esencialmente, un **espacio vectorial complejo** es un conjunto V do **vectores** donde hay una operación de suma de vectores (es decir, si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, tenemos un vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$) y se puede multiplicar los vectores por números complejos (es decir, si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{v} \in V$, tenemos un vector $\lambda \mathbf{v} \in V$.
- Hay condiciones técnicas:
  1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
  2. Existe $0 \in V$ con $\mathbf{v} + 0 = 0 + \mathbf{v}$
  3. $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z}$
  4. $\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 0$
  5. $a\mathbf{v} + b\mathbf{v} = (a + b)\mathbf{v}$
  6. $(ab)c\mathbf{v} = a((bc)\mathbf{v})$
  7. $(1)\mathbf{v} = \mathbf{v}$

- Esencialmente, un **espacio vectorial complejo** es un conjunto V do **vectores** donde hay una operación de suma de vectores (es decir, si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, tenemos un vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$) y se puede multiplicar los vectores por números complejos (es decir, si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{v} \in V$, tenemos un vector $\lambda \mathbf{v} \in V$.
- Hay condiciones técnicas:
  1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
  2. Existe $0 \in V$ con $\mathbf{v} + 0 = 0 + \mathbf{v}$
  3. $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z}$
  4. $\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 0$
  5. $a\mathbf{v} + b\mathbf{v} = (a + b)\mathbf{v}$
  6. $(ab)c\mathbf{v} = a((bc)\mathbf{v})$
  7. $(1)\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Ejemplos de Espacios Vectoriales Complejos

- Los números complejos $\mathbb{C}$ con suma y multiplicación por números complejos.
- El espacio

$$\mathbb{C}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}\}$$

donde la suma es entrada por entrada y la multiplicación escalar es entrada por entrada: por ejemplo, en $\mathbb{C}^2$, la suma es:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

y el producto por escalares es:

$$\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2).$$

- El espacio

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$$

con la suma:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

y producto por escalares:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Productos Internos

- Los productos internos para espacios complejos se ven diferente. Por ejemplo, en $\mathbb{C}^2$ se define por:

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2}$$

  donde $\overline{z}$ representa la conjugación compleja de z.
- El producto interno en $L^2(\mathbb{R})$ se define por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Definition

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ con producto interno que además es completo como espacio métrico con la siguiente métrica:

$$d(v, w) = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

para todo $v, w \in \mathcal{H}$. (Es decir, toda sucesión de Cauchy converge.)

- Ejemplo:

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$$

Espacios de Hilbert

Definition

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ con producto interno que además es completo como espacio métrico con la siguiente métrica:

$$d(v, w) = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

para todo $v, w \in \mathcal{H}$. (Es decir, toda sucesión de Cauchy converge.)

- Ejemplo:

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$$

Definition

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ con producto interno que además es completo como espacio métrico con la siguiente métrica:

$$d(v, w) = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

para todo $v, w \in \mathcal{H}$. (Es decir, toda sucesión de Cauchy converge.)

- Ejemplo:

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$$

- Las simetrías de espacios de Hilbert se llaman *operadores unitarios*.
- Si $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo con producto interno, un **operador unitario** es una función invertible

$$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

tal que

1. $U(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = U(\mathbf{v}) + U(\mathbf{w})$
2. $U(\lambda \mathbf{v}) = \lambda U(\mathbf{v})$
3. $\langle v, w \rangle = \langle U(\mathbf{v}), U(\mathbf{w}) \rangle$

- Se denota por $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ al grupo de transformaciones unitarias de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$.
- Ejemplo: $\mathbb{C}^n$ con producto interno estándar

$$\mathrm{U}(\mathbb{C}^n) := \mathrm{U}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) \mid X^*X = I\}$$

Simetrías de Espacios de Hilbert

- Se denota por $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ al grupo de transformaciones unitarias de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$.
- Ejemplo: $\mathbb{C}^n$ con producto interno estándar

$$\mathrm{U}(\mathbb{C}^n) := \mathrm{U}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) \mid X^*X = I\}$$

Mecánica Cuántica en Dos Minutos (Según Dirac y von Neumann)

- El **estado** de un sistema cuántico es un vector $\psi \neq 0$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, salvo que el vector ψ y cualquier múltiplo escalar $\lambda\psi$ representan el mismo estado cuántico para cualquier número complejo $\lambda \neq 0$.
- Un **observable** del sistema es un operador lineal autoadjunto $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
- Si $\psi \in \mathcal{H}$ es un estado y

$$A(\psi) = \lambda\psi$$

para algún número complejo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces al medir el observable A del sistema en el estado ψ, siempre se obtendrá el valor λ.

Mecánica Cuántica en Dos Minutos (Según Dirac y von Neumann)

- El **estado** de un sistema cuántico es un vector $\psi \neq 0$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, salvo que el vector ψ y cualquier múltiplo escalar $\lambda\psi$ representan el mismo estado cuántico para cualquier número complejo $\lambda \neq 0$.
- Un **observable** del sistema es un operador lineal autoadjunto $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
- Si $\psi \in \mathcal{H}$ es un estado y

$$A(\psi) = \lambda\psi$$

para algún número complejo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces al medir el observable A del sistema en el estado ψ, siempre se obtendrá el valor λ.

Mecánica Cuántica en Dos Minutos (Según Dirac y von Neumann)

- El **estado** de un sistema cuántico es un vector $\psi \neq 0$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, salvo que el vector ψ y cualquier múltiplo escalar $\lambda\psi$ representan el mismo estado cuántico para cualquier número complejo $\lambda \neq 0$.
- Un **observable** del sistema es un operador lineal autoadjunto $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
- Si $\psi \in \mathcal{H}$ es un estado y

$$A(\psi) = \lambda\psi$$

para algún número complejo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces al medir el observable A del sistema en el estado ψ, siempre se obtendrá el valor λ.

Mecánica Cuántica en Dos Minutos (Según Dirac y von Neumann)

- El **estado** de un sistema cuántico es un vector $\psi \neq 0$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, salvo que el vector ψ y cualquier múltiplo escalar $\lambda\psi$ representan el mismo estado cuántico para cualquier número complejo $\lambda \neq 0$.
- Un **observable** del sistema es un operador lineal autoadjunto $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
- Si $\psi \in \mathcal{H}$ es un estado y

$$A(\psi) = \lambda\psi$$

para algún número complejo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces al medir el observable A del sistema en el estado ψ, siempre se obtendrá el valor λ.

Mecánica Cuántica en Dos Minutos (Según Dirac y von Neumann)

- El **estado** de un sistema cuántico es un vector $\psi \neq 0$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, salvo que el vector ψ y cualquier múltiplo escalar $\lambda\psi$ representan el mismo estado cuántico para cualquier número complejo $\lambda \neq 0$.
- Un **observable** del sistema es un operador lineal autoadjunto $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
- Si $\psi \in \mathcal{H}$ es un estado y

$$A(\psi) = \lambda\psi$$

para algún número complejo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces al medir el observable A del sistema en el estado ψ, siempre se obtendrá el valor λ.

Mecánica Cuántica en Dos Minutos (Según Dirac y von Neumann)

- El **estado** de un sistema cuántico es un vector $\psi \neq 0$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, salvo que el vector ψ y cualquier múltiplo escalar $\lambda\psi$ representan el mismo estado cuántico para cualquier número complejo $\lambda \neq 0$.
- Un **observable** del sistema es un operador lineal autoadjunto $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
- Si $\psi \in \mathcal{H}$ es un estado y

$$A(\psi) = \lambda\psi$$

para algún número complejo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces al medir el observable A del sistema en el estado ψ, siempre se obtendrá el valor λ.

Simetrías Cuánticas

Theorem (Wigner)

Cualquier biyección $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *de un espacio de Hilbert que preserve los ángulos entre todos los vectores es un mapeo unitario o antiunitario.*

Representaciones

- Los grupos actúan sobre espacios vectoriales mediantes las **representaciones**.
- Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, una **representación unitaria** de un grupo G es una aplicación $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ tal que:

$$\pi(gh) = \pi(g) \circ \pi(h)$$

- Las representaciones unitarias se descomponen en sumas de representaciones **irreducibles**.

Representaciones Irreducibles

- ¡Las representaciones irreducibles del grupo de traslaciones $\mathbb{R}$ son precisamente las armonías elementales!:

$$\begin{aligned} e_y : \mathbb{R} &\to \mathbb{C}, y \in \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{2\pi i y x} = \cos(2\pi y x) + i \operatorname{sen}(2\pi y x) \end{aligned}$$

- Las representaciones irreducibles del grupo de traslaciones $\mathbb{R}^3$ son parecidas:

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{C}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\mapsto e^{2\pi i \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} = \cos(2\pi \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + i \operatorname{sen}(2\pi \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \end{aligned}$$

- Así se explican las ondas de Schrödinger y de Broglie.

- Hay una representación irreducible π_j del grupo $\mathrm{SO}(3)$ de dimensión $2j+1$ para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$. Corresponde a un sistema con momento angular total de $\hbar\sqrt{j(j+1)}$.
- Hay que considerar las representaciones irreducibles del grupo $\mathrm{SU}(2)$ que es el **doble-cubriente** de $\mathrm{SO}(3)$. Sus representaciones irreducibles π_s existen para $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ y son de dimensión $2s+1$ y corresponden a sistemas con momento angular total de $\hbar\sqrt{s(s+1)}$.

Representaciones Irreducibles

- Hay una representación irreducible π_j del grupo $\mathrm{SO}(3)$ de dimensión $2j+1$ para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$. Corresponde a un sistema con momento angular total de $\hbar\sqrt{j(j+1)}$.
- Hay que considerar las representaciones irreducibles del grupo $\mathrm{SU}(2)$ que es el **doble-cubriente** de $\mathrm{SO}(3)$. Sus representaciones irreducibles π_s existen para $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ y son de dimensión $2s+1$ y corresponden a sistemas con momento angular total de $\hbar\sqrt{s(s+1)}$.