Problemas de mapas
y soluciones con gráficas o análisis

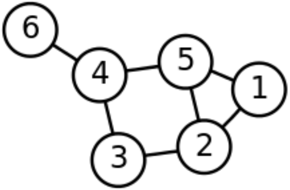
Sofía Ortega Castillo

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.
Área de Matemáticas Básicas

11 de Mayo, 2017
Universidad Autónoma de Chiapas

Mapas y gráficas

Gráficas:

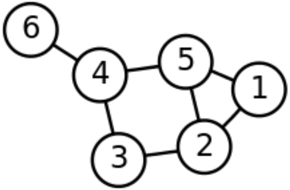


$G = (V, E)$:

- Componente conexa
- Grado

Mapas y gráficas

Gráficas:

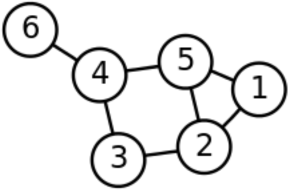


$G = (V, E)$:

- Componente conexa
- Grado

Mapas y gráficas

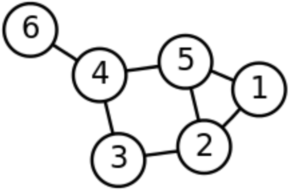
Gráficas:



$G = (V, E)$:

- Componente conexa
- Grado

Gráficas:



$G = (V, E)$:

- Componente conexa
- Grado

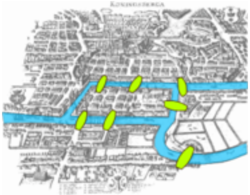
Ejemplo

Siete puentes de Königsberg.

Mapas y gráficas

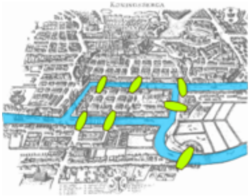
Ejemplo

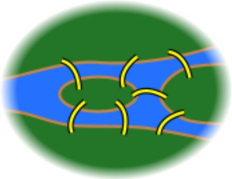
Siete puentes de Königsberg.



Ejemplo

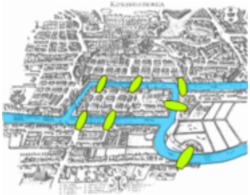
Siete puentes de Königsberg.

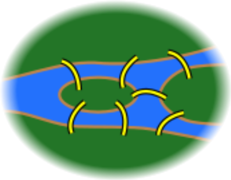


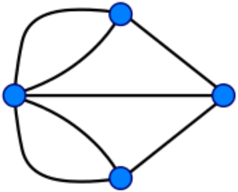


Ejemplo

Siete puentes de Königsberg.







Uso de gráficas en mapas: Representación de redes.

Modelo de Erdös-Rényi para redes:

Definition

El espacio de probabilidad de gráficas aleatorias $G(n, p)$ consiste de todas las gráficas en n vértices fijos que se generan al incluir cada arista potencial independientemente con probabilidad p.

Redes y gráficas aleatorias

Uso de gráficas en mapas: Representación de redes.

Modelo de Erdös-Rényi para redes:

Definition

El espacio de probabilidad de gráficas aleatorias $G(n, p)$ consiste de todas las gráficas en n vértices fijos que se generan al incluir cada arista potencial independientemente con probabilidad p.

Redes y gráficas aleatorias

Uso de gráficas en mapas: Representación de redes.

Modelo de Erdös-Rényi para redes:

Definition

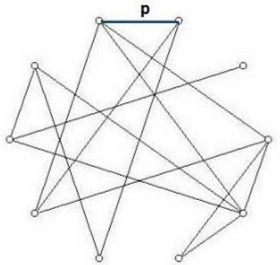
El espacio de probabilidad de gráficas aleatorias $G(n,p)$ consiste de todas las gráficas en n vértices fijos que se generan al incluir cada arista potencial independientemente con probabilidad p.

Uso de gráficas en mapas: Representación de redes.

Modelo de Erdös-Rényi para redes:

Definition

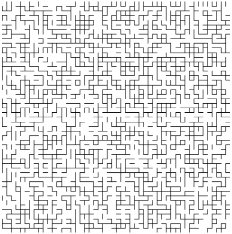
El espacio de probabilidad de gráficas aleatorias $G(n, p)$ consiste de todas las gráficas en n vértices fijos que se generan al incluir cada arista potencial independientemente con probabilidad p.



Redes y gráficas aleatorias

Ejemplo

Redes eléctricas.



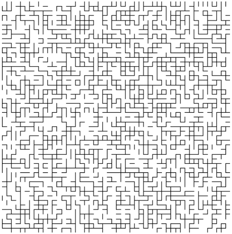
Propiedades de conexidad para redes de tipo $G(n, p)$;

1. Cuando el grado promedio esperado $(n-1)p > 1$, tiene una componente conexa grande c. s.;
2. De otro modo, está fragmentada en pequeños grupos desconectados c. s.

Estas son características de percolación, con borde de percolación=1.

Ejemplo

Redes eléctricas.



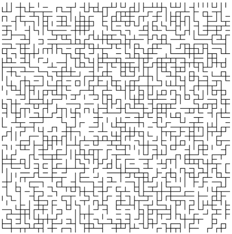
Propiedades de conexidad para redes de tipo $G(n,p)$;

1. Cuando el grado promedio esperado $(n-1)p > 1$, tiene una componente conexa grande c. s.;
2. De otro modo, está fragmentada en pequeños grupos desconectados c. s.

Estas son características de percolación, con borde de percolación=1.

Ejemplo

Redes eléctricas.



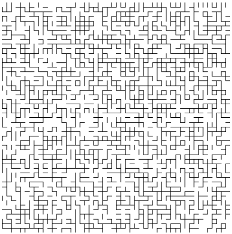
Propiedades de conexidad para redes de tipo $G(n,p)$;

1. Cuando el grado promedio esperado $(n-1)p > 1$, tiene una componente conexa grande c. s.;
2. De otro modo, está fragmentada en pequeños grupos desconectados c. s.

Estas son características de percolación, con borde de percolación=1.

Ejemplo

Redes eléctricas.



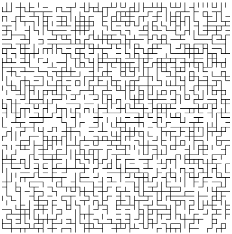
Propiedades de conexidad para redes de tipo $G(n, p)$;

1. Cuando el grado promedio esperado $(n-1)p > 1$, tiene una componente conexa grande c. s.;
2. De otro modo, está fragmentada en pequeños grupos desconectados c. s.

Estas son características de percolación, con borde de percolación=1

Ejemplo

Redes eléctricas.

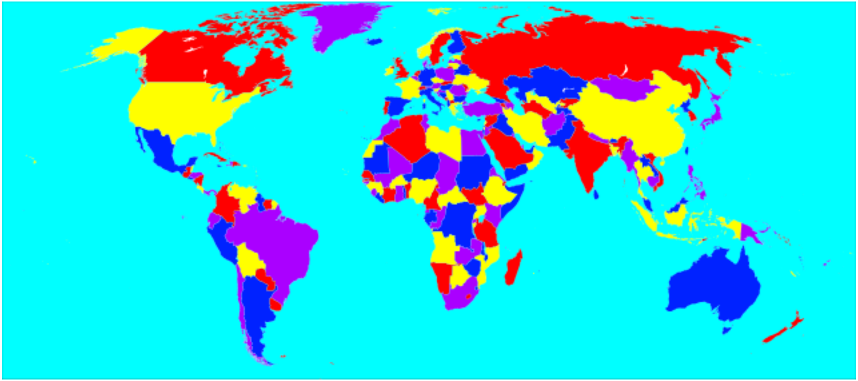


Propiedades de conexidad para redes de tipo $G(n, p)$;

1. Cuando el grado promedio esperado $(n-1)p > 1$, tiene una componente conexa grande c. s.;
2. De otro modo, está fragmentada en pequeños grupos desconectados c. s.

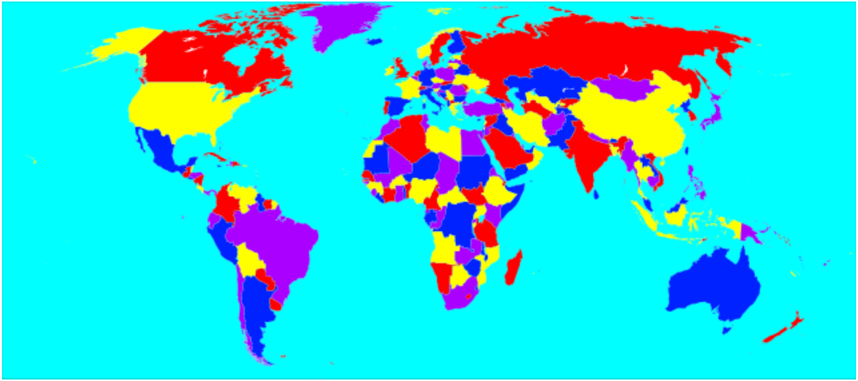
Estas son características de percolación, con borde de percolación=1.

Problema de los cuatro colores



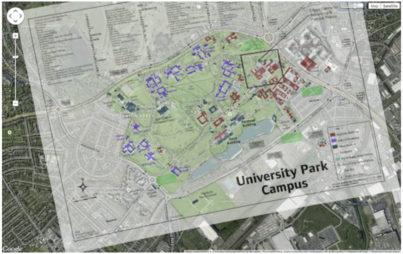
Un problema que estuvo abierto por mucho tiempo, y que ahora es digno de mención debido a su prueba asistida por computadora.

Problema de los cuatro colores



Un problema que estuvo abierto por mucho tiempo, y que ahora es digno de mención debido a su prueba asistida por computadora.

Problemas de punto fijo

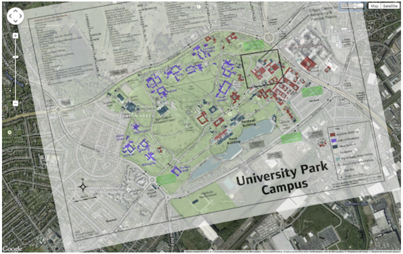


Teorema (Principio de contracción de Banach)

Si (X, d) es un espacio métrico completo, toda contracción $T : X \to X$ tiene un único punto fijo $x_0 \in X$.

Usos: Ecuaciones diferenciales, equilibrio económico, etc.

Problemas de punto fijo

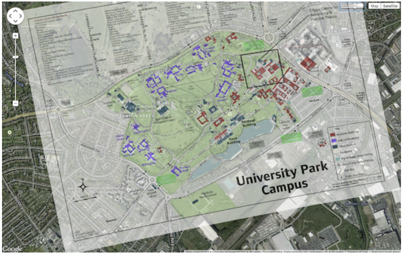


Teorema (Principio de contracción de Banach)

Si (X, d) es un espacio métrico completo, toda contracción $T : X \to X$ tiene un único punto fijo $x_0 \in X$.

Usos: Ecuaciones diferenciales, equilibrio económico, etc.

Problemas de punto fijo



Teorema (Principio de contracción de Banach)

Si (X,d) es un espacio métrico completo, toda contracción $T : X \to X$ tiene un único punto fijo $x_0 \in X$.

Usos: Ecuaciones diferenciales, equilibrio económico, etc.

Problemas de punto fijo

Relajando la condición estricta:

- T no se expande en X, y es función lineal.
- X es región convexa, cerrada y acotada de un espacio normado.

Se mantiene un único punto fijo cuando la bola unitaria del espacio lineal es estrictamente convexa, con característica de convexidad < 2.

Relajando la condición estricta:

- T no se expande en X, y es función lineal.
- X es región convexa, cerrada y acotada de un espacio normado.

Se mantiene un único punto fijo cuando la bola unitaria del espacio lineal es estrictamente convexa, con característica de convexidad < 2.

Problemas de punto fijo

Relajando la condición estricta:

- T no se expande en X, y es función lineal.
- X es región convexa, cerrada y acotada de un espacio normado.

Se mantiene un único punto fijo cuando la bola unitaria del espacio lineal es estrictamente convexa, con característica de convexidad < 2.

Problemas de punto fijo

Relajando la condición estricta:

- T no se expande en X, y es función lineal.
- X es región convexa, cerrada y acotada de un espacio normado.

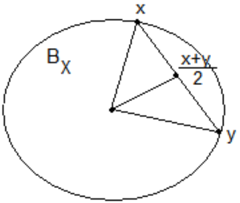
Se mantiene un único punto fijo cuando la bola unitaria del espacio lineal es estrictamente convexa, con característica de convexidad < 2.

Relajando la condición estricta:

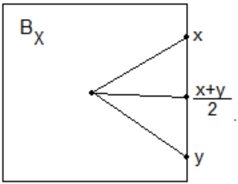
- T no se expande en X, y es función lineal.
- X es región convexa, cerrada y acotada de un espacio normado.

Se mantiene un único punto fijo cuando la bola unitaria del espacio lineal es estrictamente convexa, con característica de convexidad < 2.

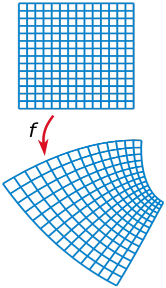
Sí:



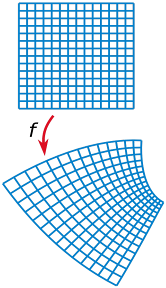
No:



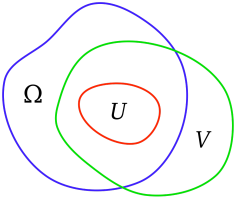
Mapas complejos



Mapas complejos



Dominios de holomorfía:



Mapas complejos

Ejemplo

Dominios fuertemente pseudocovexos: análogo complejo -en términos locales de derivabilidad- de dominios estrictamente convexos con frontera C^2.

Algunos dominios fuertemente pseudoconvexos:

- Las bolas unitarias de los espacios $\ell_p^n(\mathbb{C})$, para $1 < p \leq 2$.
- [O-C, '14] La bola unitaria de $\ell_1^n(\mathbb{C})$, a pesar de no tener frontera suave ni ser estrictamente convexa.

Ejemplo

Dominios fuertemente pseudocovexos: análogo complejo -en términos locales de derivabilidad- de dominios estrictamente convexos con frontera C^2.

Algunos dominios fuertemente pseudoconvexos:

- Las bolas unitarias de los espacios $\ell_p^n(\mathbb{C})$, para $1 < p \leq 2$.
- [O-C, '14] La bola unitaria de $\ell_1^n(\mathbb{C})$, a pesar de no tener frontera suave ni ser estrictamente convexa.

Ejemplo

Dominios fuertemente pseudocovexos: análogo complejo -en términos locales de derivabilidad- de dominios estrictamente convexos con frontera C^2.

Algunos dominios fuertemente pseudoconvexos:

- Las bolas unitarias de los espacios $\ell_p^n(\mathbb{C})$, para $1 < p \leq 2$.
- [O-C, '14] La bola unitaria de $\ell_1^n(\mathbb{C})$, a pesar de no tener frontera suave ni ser estrictamente convexa.

Ejemplo

Dominios fuertemente pseudocovexos: análogo complejo -en términos locales de derivabilidad- de dominios estrictamente convexos con frontera C^2.

Algunos dominios fuertemente pseudoconvexos:

- Las bolas unitarias de los espacios $\ell_p^n(\mathbb{C})$, para $1 < p \leq 2$.
- [O-C, '14] La bola unitaria de $\ell_1^n(\mathbb{C})$, a pesar de no tener frontera suave ni ser estrictamente convexa.

Problema del agente viajero

Problema NP-difícil en optimización combinacional.

Problema NP-difícil en optimización combinacional.

Problema del agente viajero

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Problema del agente viajero

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Problema del agente viajero

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Problema del agente viajero

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Problema del agente viajero

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Problema del agente viajero

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Problema del agente viajero

Usos: planificación, circuitos electrónicos, secuenciación de ADN, etc.

1. 1970: algoritmo para hallar soluciones aproximadas.
2. Recientemente probado que el algoritmo se desempeña exponencialmente mejor de lo que se entendía.
3. Método: ideas de la prueba del problema de Kadison-Singer:

Abierto por casi 50 años, pregunta sobre las bases de física cuántica, formalmente en términos de álgebras C^*.

Resuelto en 2013, con implicaciones a una docena de áreas distantes en matemáticas.

Bibliography

- A. Benjamin, G. Chartrand, P. Zhang, *The fascinating world of graph theory*, Princeton University Press, New Jersey, 2015.
- J. García-Falset, E. Llorens-Fuster and E. Mazcuñan-Navarro (2006). *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*. Journal of Functional Analysis 233 (2006), pp. 494-514.
- S. Ortega-Castillo, *Strong pseudoconvexity in Banach spaces*, Submitted to CAOT.

Resumen

- Mapas y gráficas
- Redes y gráficas aleatorias
- Problema de los cuatro colores
- Problemas de punto fijo
- Mapas complejos
- Problema del agente viajero

¡GRACIAS!