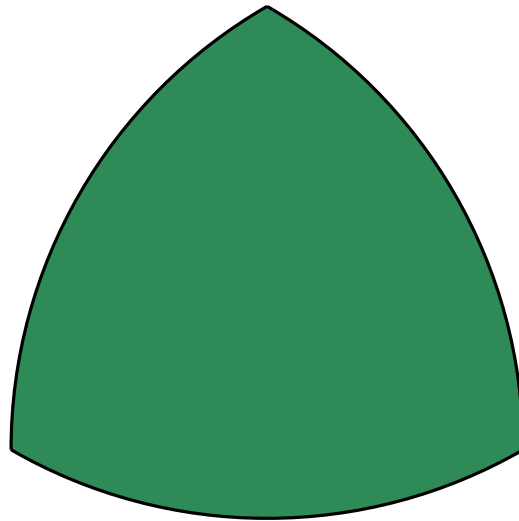


Cuerpos de Ancho Constante

Edgardo Roldán-Pensado
y Luis Montejano



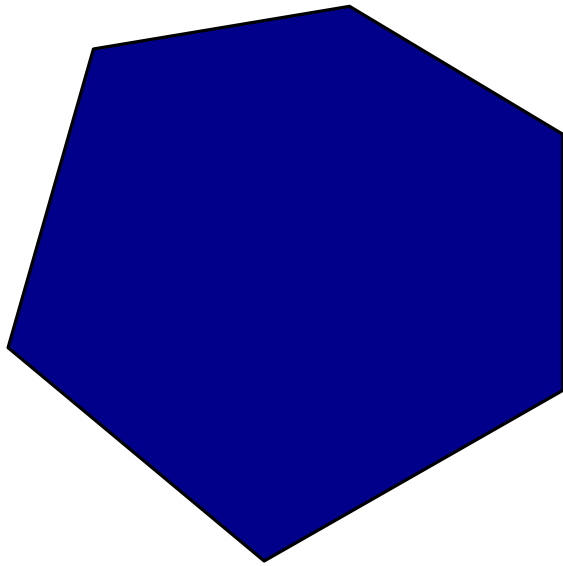
4 de mayo de 2017

Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.

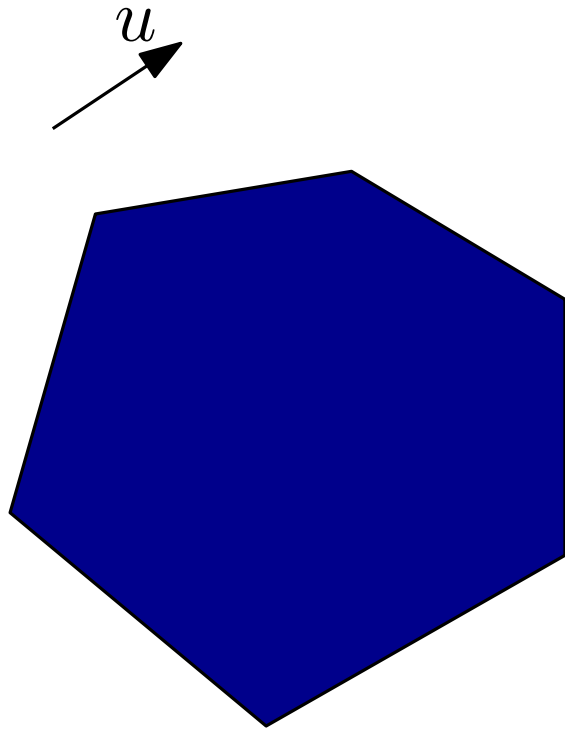
Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.



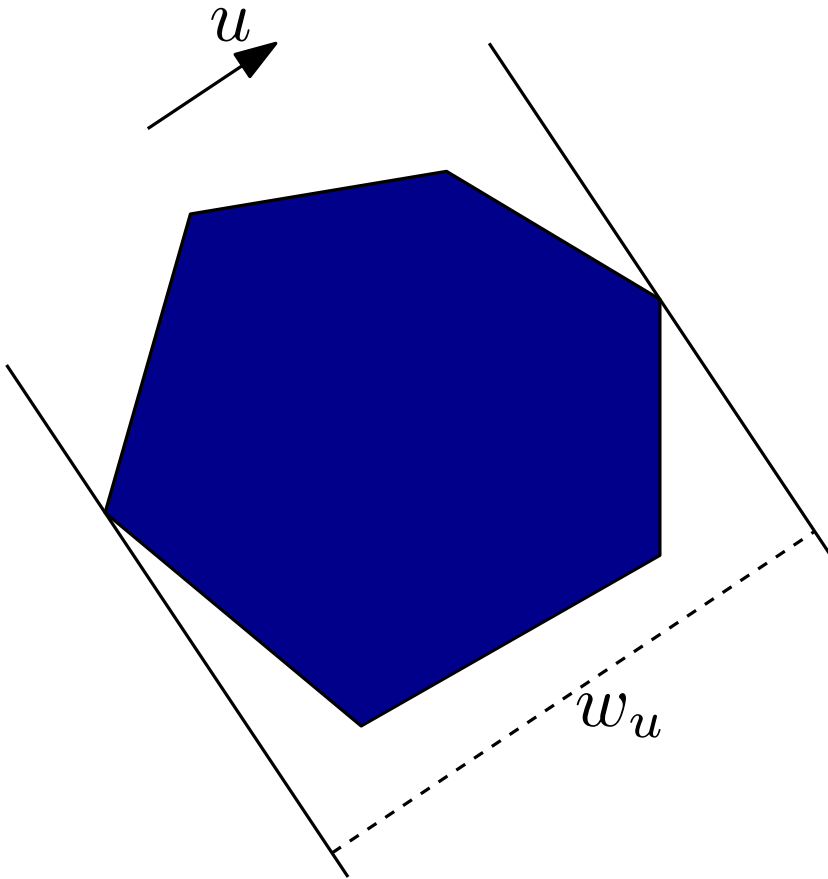
Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.



Ancho constante

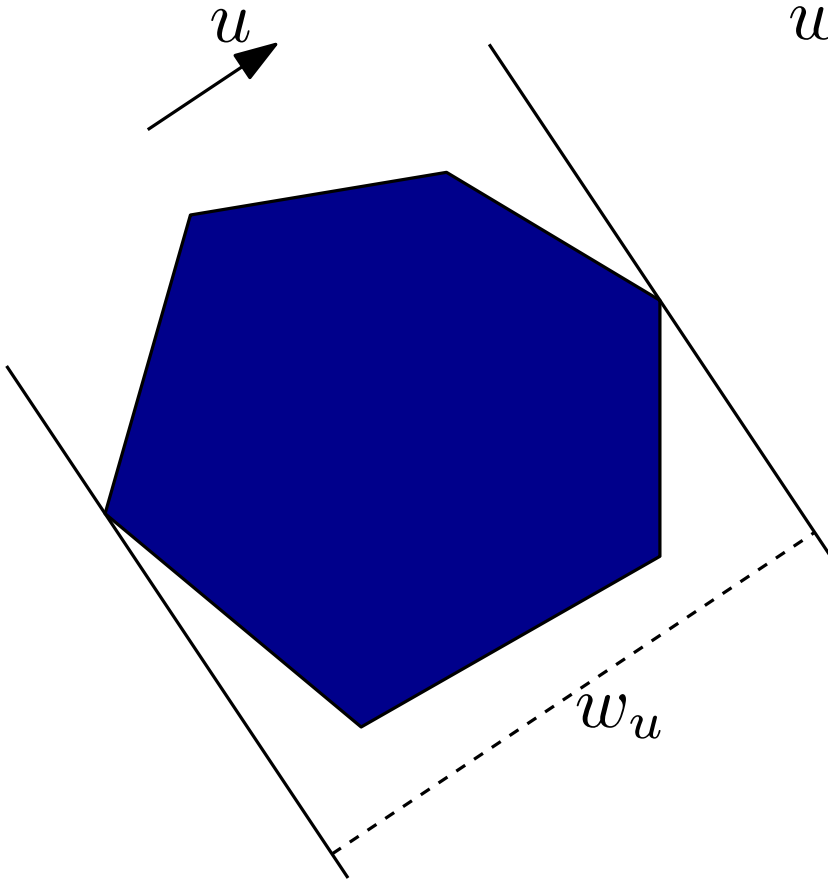
Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.



Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.

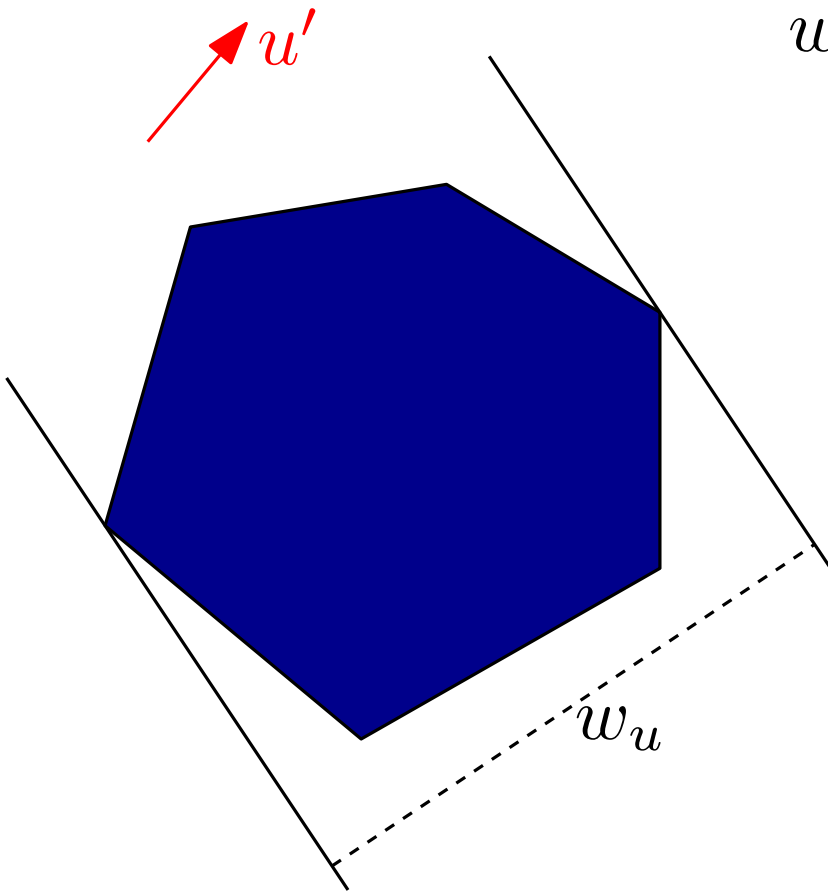
$$w_u = \max_{x,y \in K} \langle x - y, u \rangle = 1$$



Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.

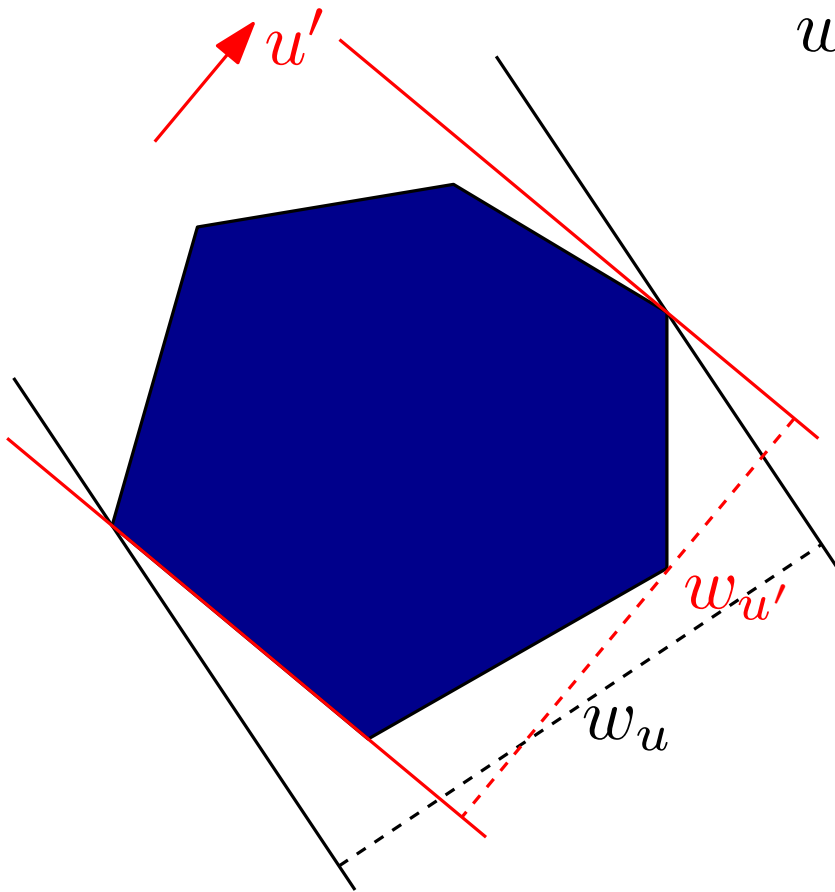
$$w_u = \max_{x,y \in K} \langle x - y, u \rangle = 1$$



Ancho constante

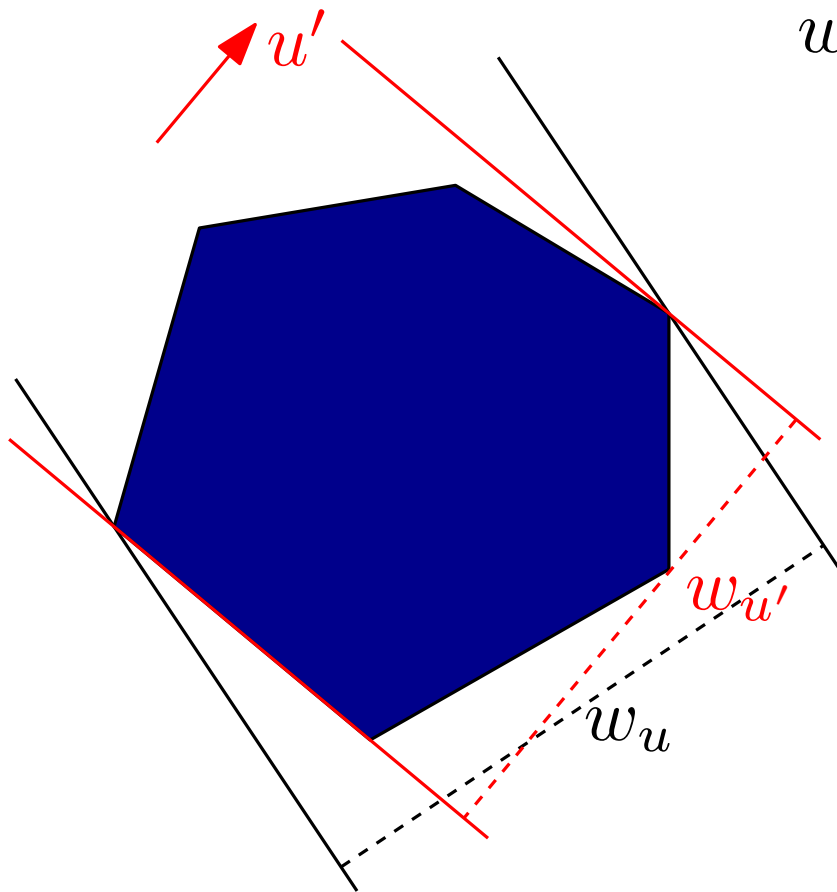
Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.

$$w_u = \max_{x,y \in K} \langle x - y, u \rangle = 1$$



Ancho constante

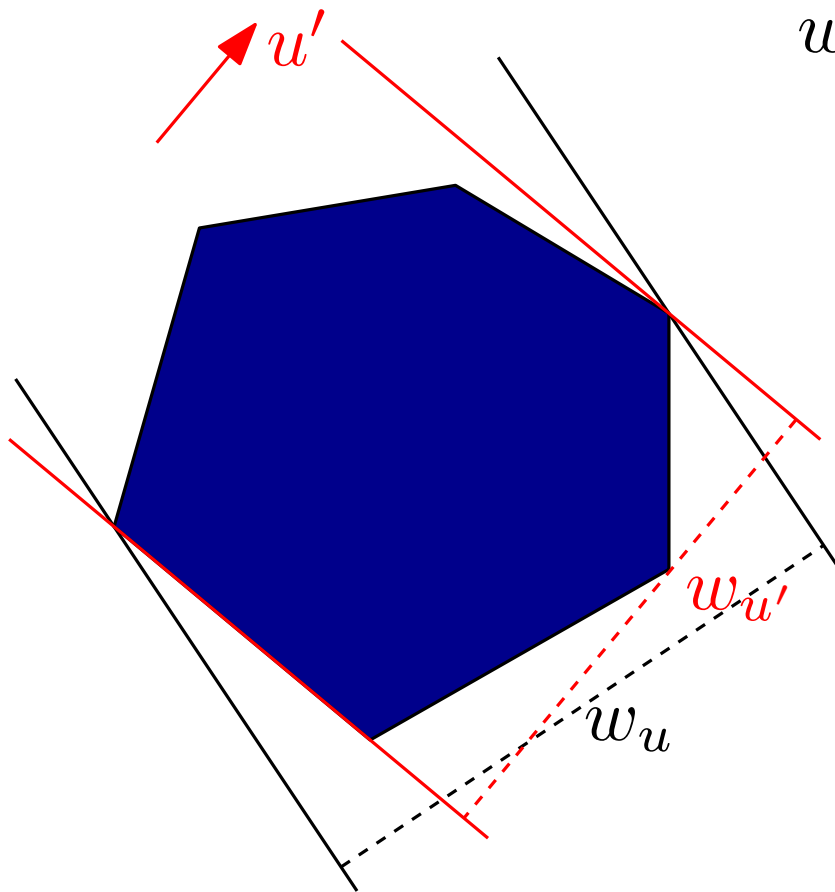
Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.



$$w_u = \max_{x,y \in K} \langle x - y, u \rangle = 1$$
$$w_{u'} < w_u$$

Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.



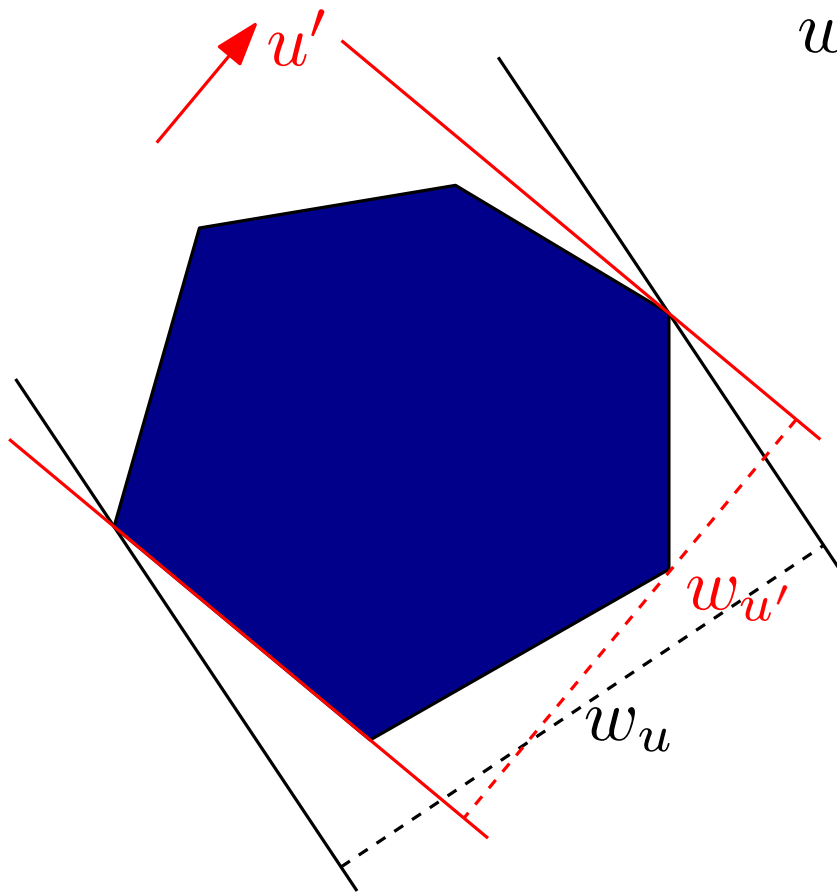
$$w_u = \max_{x,y \in K} \langle x - y, u \rangle = 1$$

$$w_{u'} < w_u$$

No es de ancho constante.

Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.

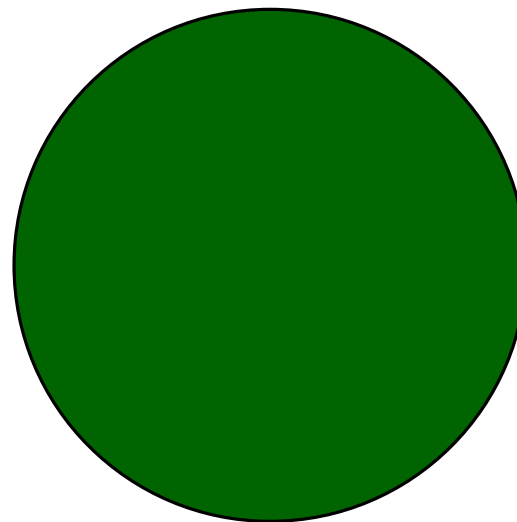


$$w_u = \max_{x,y \in K} \langle x - y, u \rangle = 1$$

$$w_{u'} < w_u$$

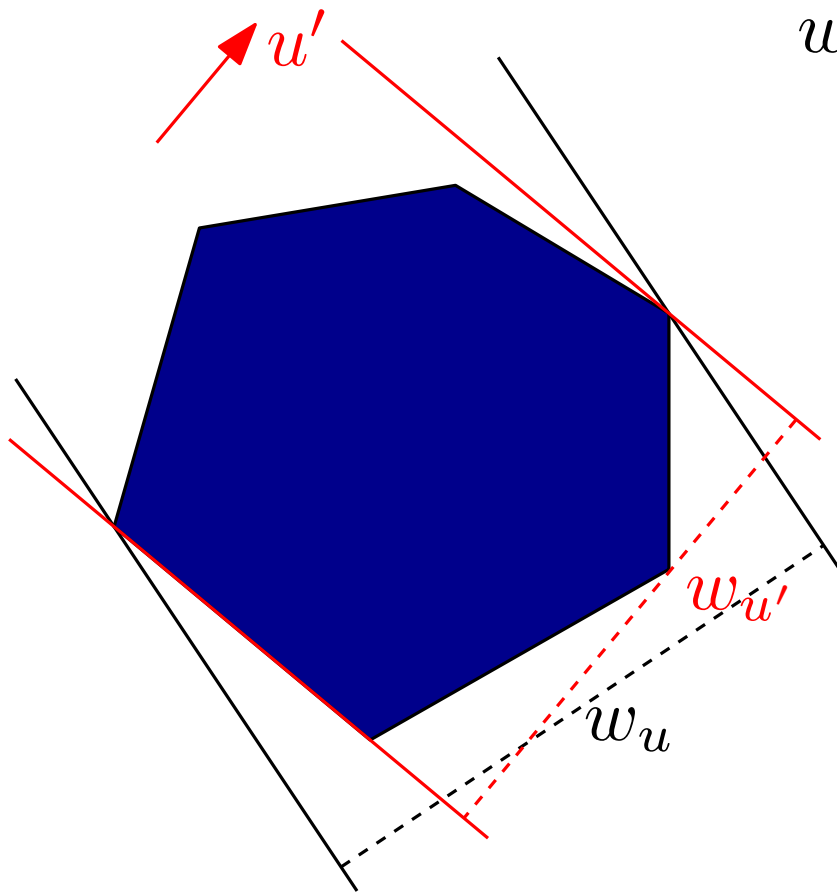
No es de ancho constante.

Pero este sí!



Ancho constante

Los cuerpos de ancho constante son conjuntos con el mismo ancho en cada dirección.

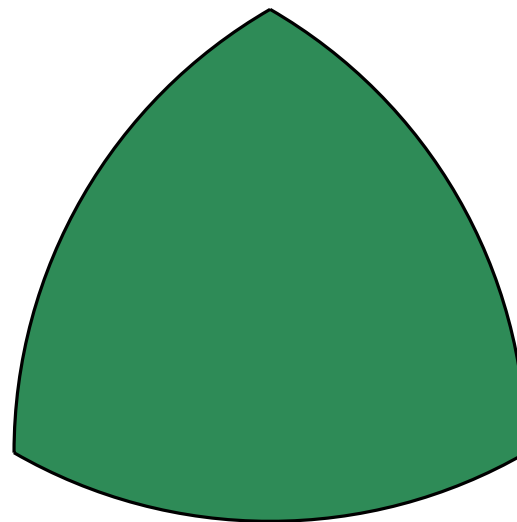


$$w_u = \max_{x,y \in K} \langle x - y, u \rangle = 1$$

$$w_{u'} < w_u$$

No es de ancho constante.

Pero este sí!

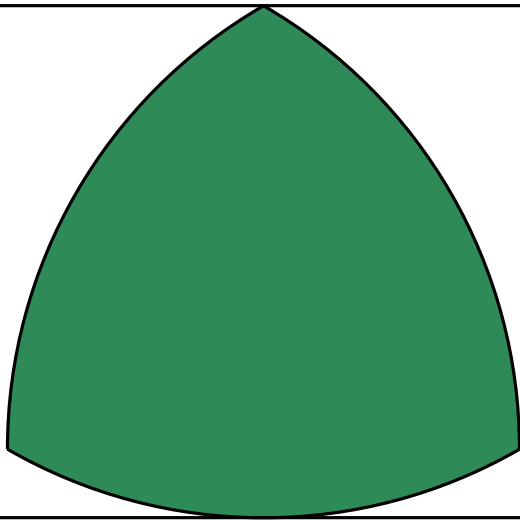


Polígonos de Reuleaux

Son figuras que se contruyen con arcos de círculos del mismo radio, pero además los centros de estos círculos deben estar en la frontera de la figura.

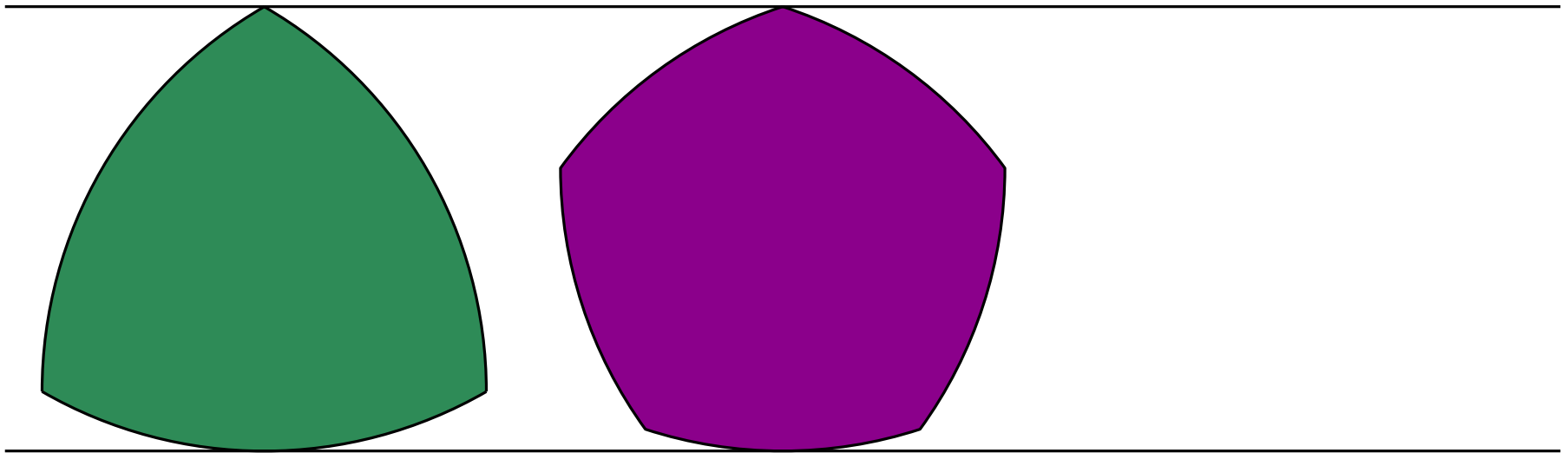
Polígonos de Reuleaux

Son figuras que se contruyen con arcos de círculos del mismo radio, pero además los centros de estos círculos deben estar en la frontera de la figura.



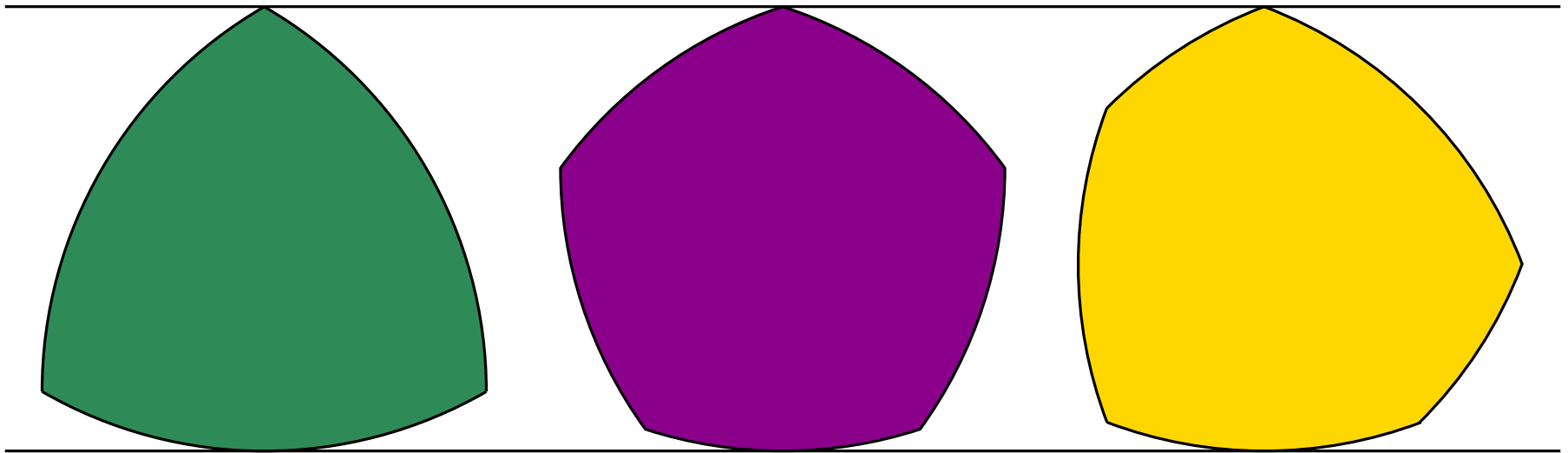
Polígonos de Reuleaux

Son figuras que se contruyen con arcos de círculos del mismo radio, pero además los centros de estos círculos deben estar en la frontera de la figura.



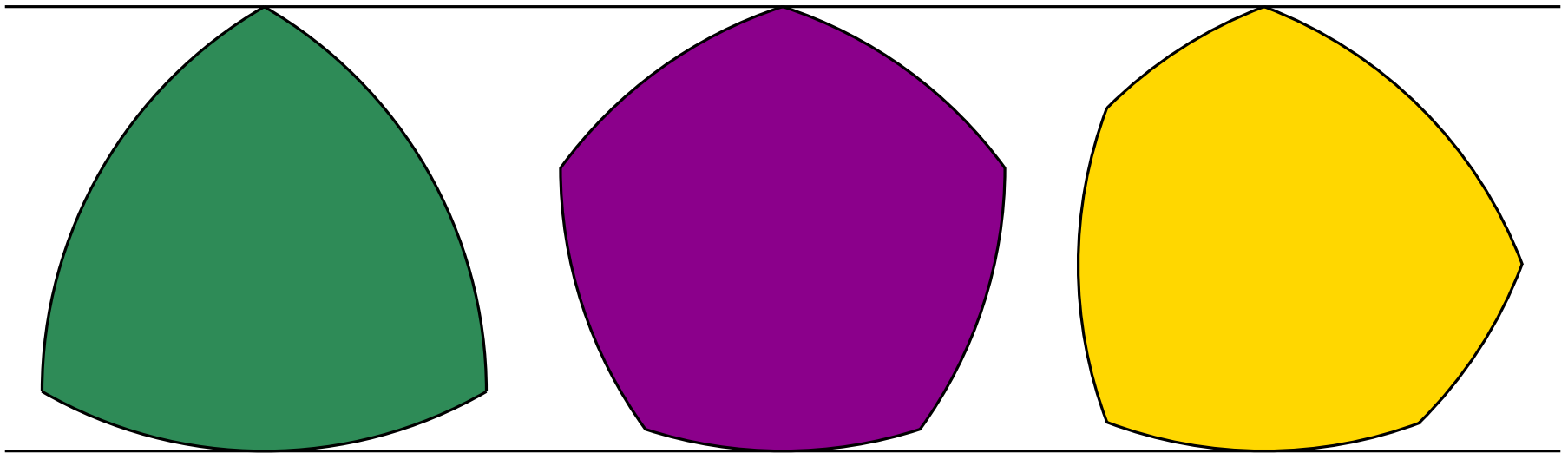
Polígonos de Reuleaux

Son figuras que se contruyen con arcos de círculos del mismo radio, pero además los centros de estos círculos deben estar en la frontera de la figura.



Polígonos de Reuleaux

Son figuras que se contruyen con arcos de círculos del mismo radio, pero además los centros de estos círculos deben estar en la frontera de la figura.



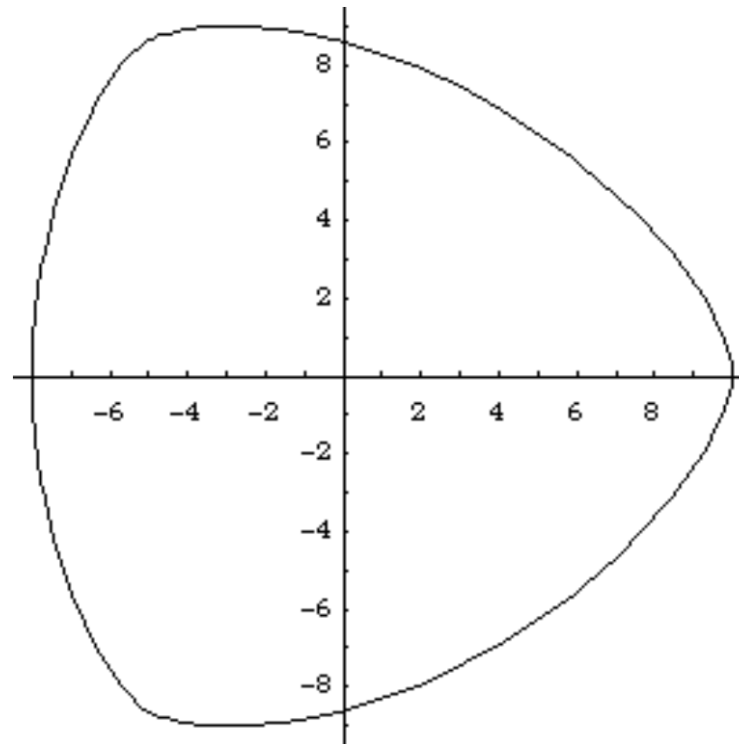
Estos son ejemplos de cuerpos de ancho constante.

Otro ejemplo interesante

$$(x^2 + y^2)^4 - 45(x^2 + y^2)^3 - 41283(x^2 + y^2)^2 + 7950960(x^2 + y^2) + 16(x^2 - 3y^2)^3 \\ + 48(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2)^2 + (x^2 - 3y^2)x[16(x^2 + y^2)^2 - 5544(x^2 + y^2) + 266382] = 720^3$$

Otro ejemplo interesante

$$(x^2 + y^2)^4 - 45(x^2 + y^2)^3 - 41283(x^2 + y^2)^2 + 7950960(x^2 + y^2) + 16(x^2 - 3y^2)^3 \\ + 48(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2)^2 + (x^2 - 3y^2)x[16(x^2 + y^2)^2 - 5544(x^2 + y^2) + 266382] = 720^3$$



¿Sirven para algo?

Sorprendentemente sí.

¿Sirven para algo?

Sorprendentemente sí.

- Para rodar cosas suavemente usando menos volumen.
- Para hacer taladros que hacen hoyos cuadrados.
- Para que monedas no circulares sirvan en máquinas dispensadoras.
- Se usaron en algunos proyectores de películas.

¿Sirven para algo?

Sorprendentemente sí.

- Para rodar cosas suavemente usando menos volumen.
- Para hacer taladros que hacen hoyos cuadrados.
- Para que monedas no circulares sirvan en máquinas dispensadoras.
- Se usaron en algunos proyectores de películas.



¿Sirven para algo?

Sorprendentemente sí.

- Para rodar cosas suavemente usando menos volumen.
- Para hacer taladros que hacen hoyos cuadrados.
- Para que monedas no circulares sirvan en máquinas dispensadoras.
- Se usaron en algunos proyectores de películas.



Subir a dimensión 3

El tetraedro de Reuleaux no es de ancho constante.

Subir a dimensión 3

El tetraedro de Reuleaux no es de ancho constante.

Teorema de existencia: Todo conjunto de diámetro d está contenido en un conjunto de ancho constante d .

Subir a dimensión 3

El tetraedro de Reuleaux no es de ancho constante.

Teorema de existencia: Todo conjunto de diámetro d está contenido en un conjunto de ancho constante d .

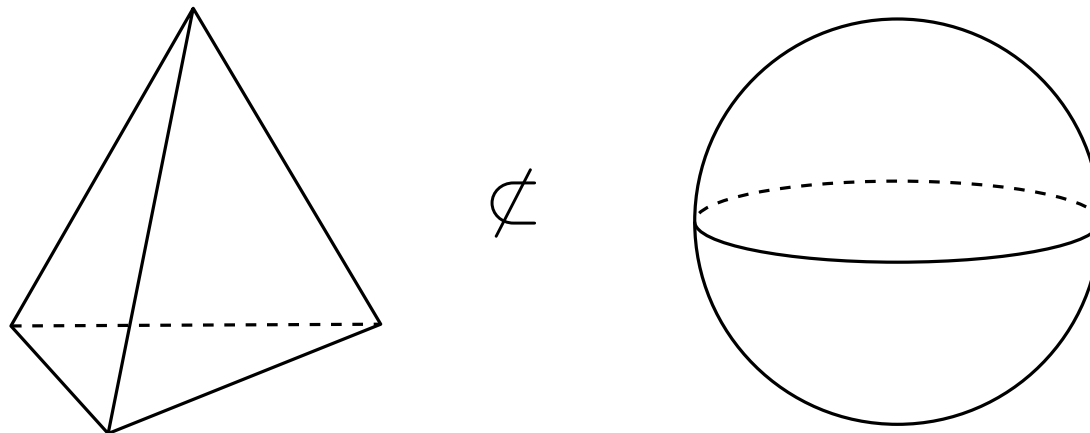
La prueba no da información acerca del cuerpo de ancho constante. Además ya sabíamos que existen: La esfera y algunos cuerpos de revolución.

Subir a dimensión 3

El tetraedro de Reuleaux no es de ancho constante.

Teorema de existencia: Todo conjunto de diámetro d está contenido en un conjunto de ancho constante d .

La prueba no da información acerca del cuerpo de ancho constante. Además ya sabíamos que existen: La esfera y algunos cuerpos de revolución.



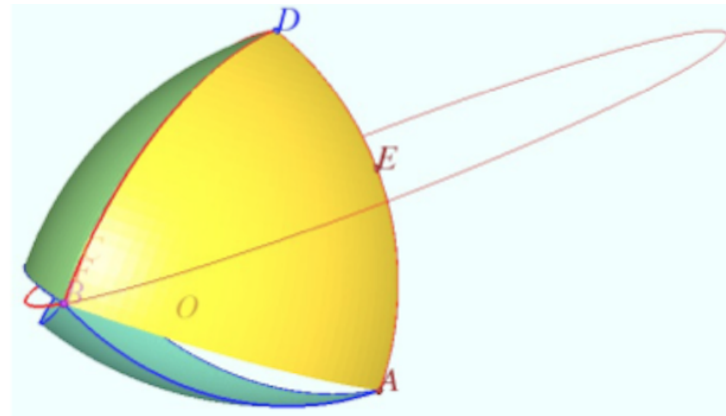
Sólidos de Meissner

En 1912 Meissner modificó el tetraedro de Reuleaux para que fuera de ancho constante.

Sólidos de Meissner

En 1912 Meissner modificó el tetraedro de Reuleaux para que fuera de ancho constante.

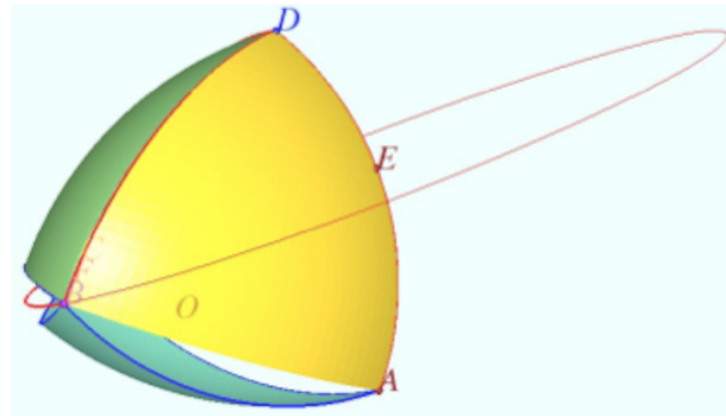
Para cada par de aristas opuestas se 'razura' una de ellas mediante un arco circular de revolución.



Sólidos de Meissner

En 1912 Meissner modificó el tetraedro de Reuleaux para que fuera de ancho constante.

Para cada par de aristas opuestas se 'razura' una de ellas mediante un arco circular de revolución.



Intentando generalizar

Definimos un *poliedro de Reuleaux* K como una intersección finita de esferas donde el centro de cada esfera es un vértice de K .

Intentando generalizar

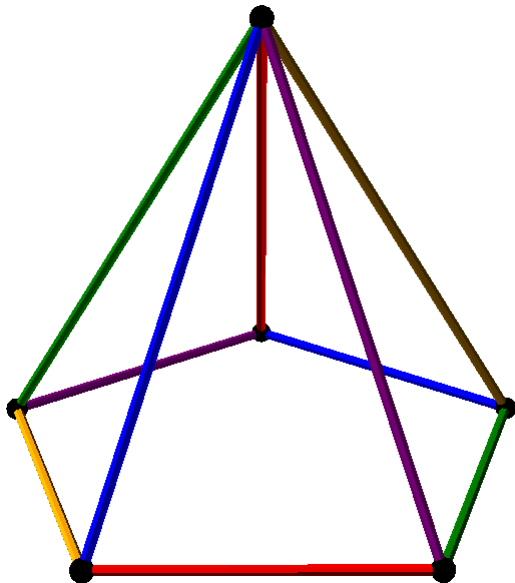
Definimos un *poliedro de Reuleaux* K como una intersección finita de esferas donde el centro de cada esfera es un vértice de K .

Además le pedimos a K que tenga la estructura combinatoria de un poliedro.

Intentando generalizar

Definimos un *poliedro de Reuleaux* K como una intersección finita de esferas donde el centro de cada esfera es un vértice de K .

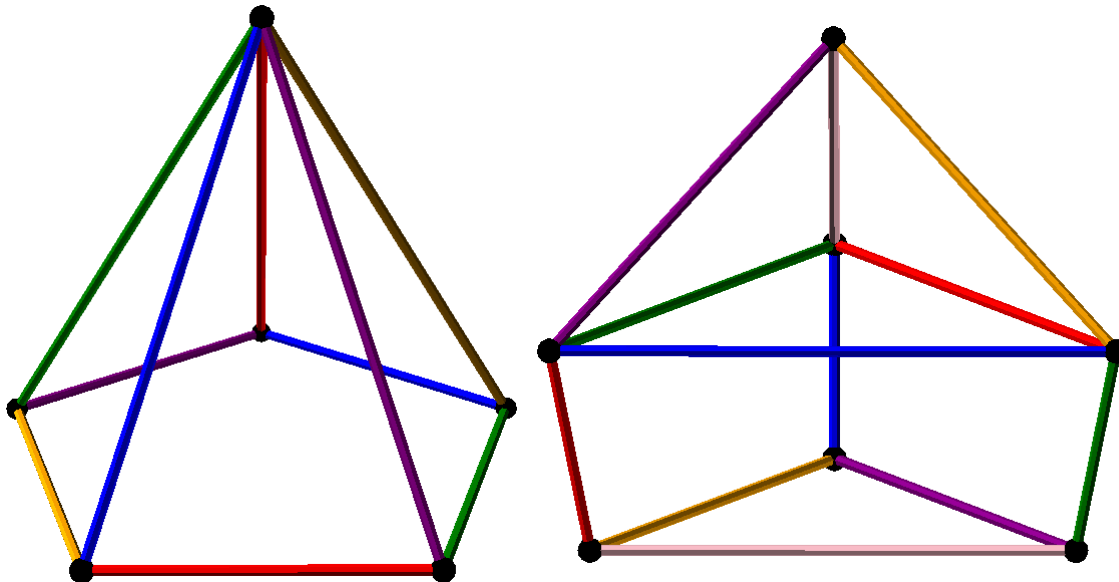
Además le pedimos a K que tenga la estructura combinatoria de un poliedro.



Intentando generalizar

Definimos un *poliedro de Reuleaux* K como una intersección finita de esferas donde el centro de cada esfera es un vértice de K .

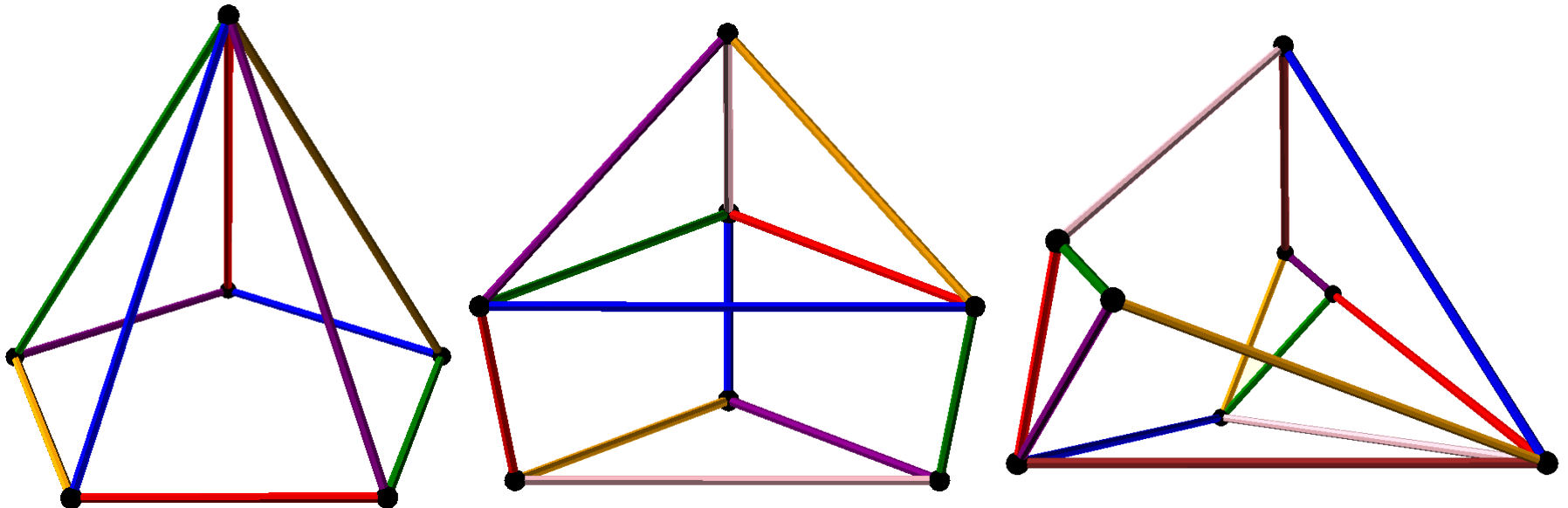
Además le pedimos a K que tenga la estructura combinatoria de un poliedro.



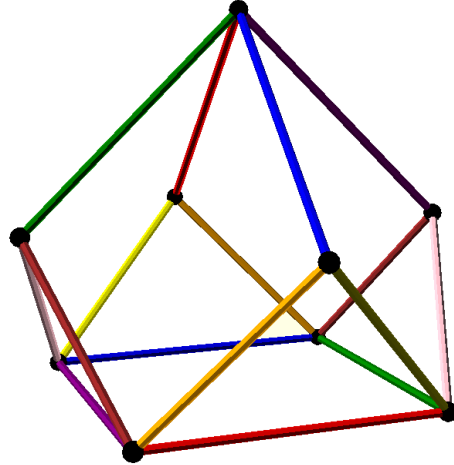
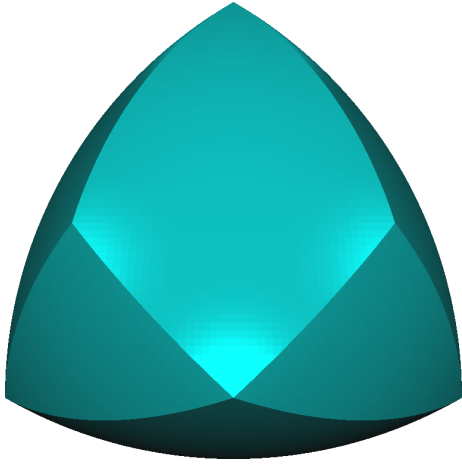
Intentando generalizar

Definimos un *poliedro de Reuleaux* K como una intersección finita de esferas donde el centro de cada esfera es un vértice de K .

Además le pedimos a K que tenga la estructura combinatoria de un poliedro.

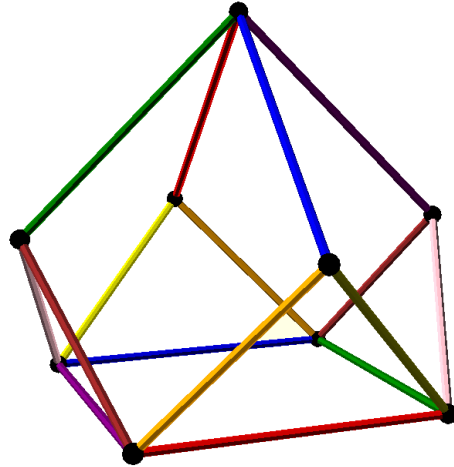
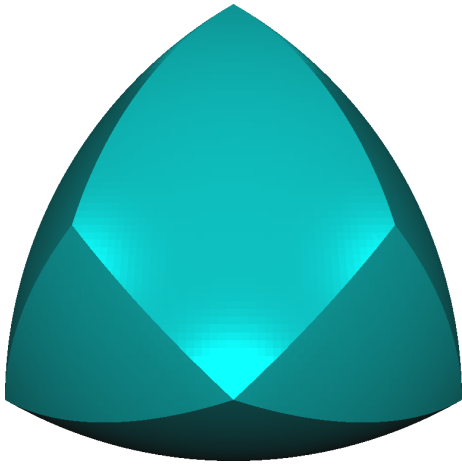


Poliedros de Meissner



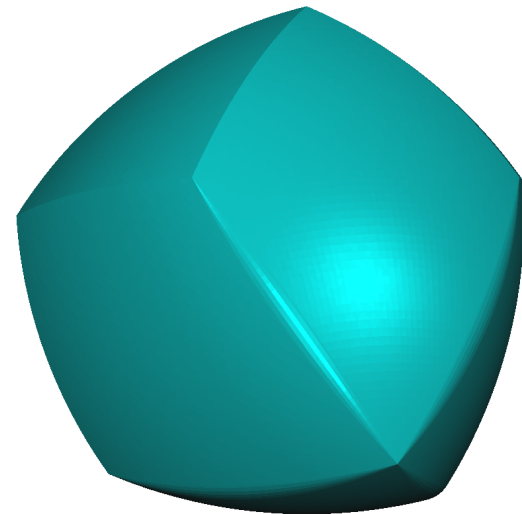
Los poliedros de Reuleaux siempre son autoduales. Entonces cada arista tiene una arista opuesta.

Poliedros de Meissner



Los poliedros de Reuleaux siempre son autoduales. Entonces cada arista tiene una arista opuesta.

Podemos imitar la construcción de Meissner para obtener un cuerpo de ancho constante. La frontera está formada de pedazos de esfera y arcos circulares de revolución.



Blaschke-Lebesgue

El Teorema de Blaschke-Lebesgue dice que el triángulo de Reuleaux es el cuerpo de ancho constante de área mínima en dimensión 2.

Blaschke-Lebesgue

El Teorema de Blaschke-Lebesgue dice que el triángulo de Reuleaux es el cuerpo de ancho constante de área mínima en dimensión 2.

Se cree que son los sólidos de Meissner tienen volumen mínimo en dimensión 3. Lo que se sabe es que la respuesta debe tener curvatura principal mínima constante.

Blaschke-Lebesgue

El Teorema de Blaschke-Lebesgue dice que el triángulo de Reuleaux es el cuerpo de ancho constante de área mínima en dimensión 2.

Se cree que son los sólidos de Meissner tienen volumen mínimo en dimensión 3. Lo que se sabe es que la respuesta debe tener curvatura principal mínima constante.

Los ejemplos que construimos cumplen esto. Pero, aunque hemos encontrado una infinidad de ejemplos, no hemos logrado describirlos todos.