Sobre el hiperespacio de hiperespacios de un continuo

Javier Sánchez-Martínez
FCFM-UNACH

16 de marzo de 2017

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto.

Podemos pensar que un continuo X es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, de una sola pieza.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto.

Podemos pensar que un continuo X es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, de una sola pieza.

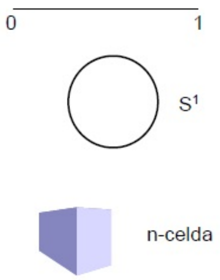


Figura: Ejemplos

Llamaremos *hiperespacio* de un continuo X a una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, con alguna propiedad en particular.

Llamaremos *hiperespacio* de un continuo X a una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, con alguna propiedad en particular.
Si A es un subconjunto cerrado y no vacío de un continuo (X, d) y $\epsilon > 0$, denotaremos como

$$N(A, \epsilon) = \{x \in X : \text{existe un punto } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}.$$

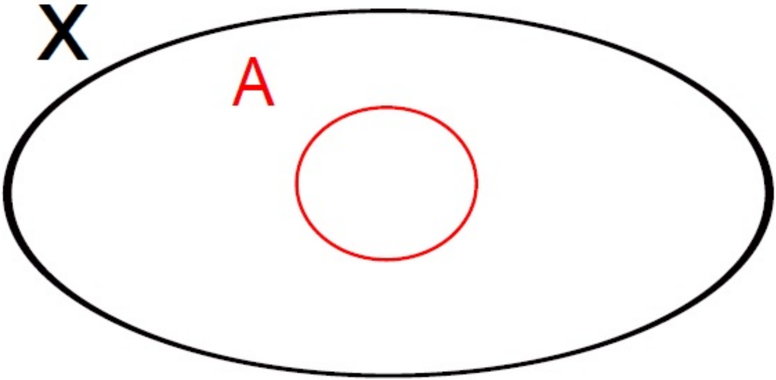
Llamaremos *hiperespacio* de un continuo X a una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, con alguna propiedad en particular.
Si A es un subconjunto cerrado y no vacío de un continuo (X, d) y $\epsilon > 0$, denotaremos como

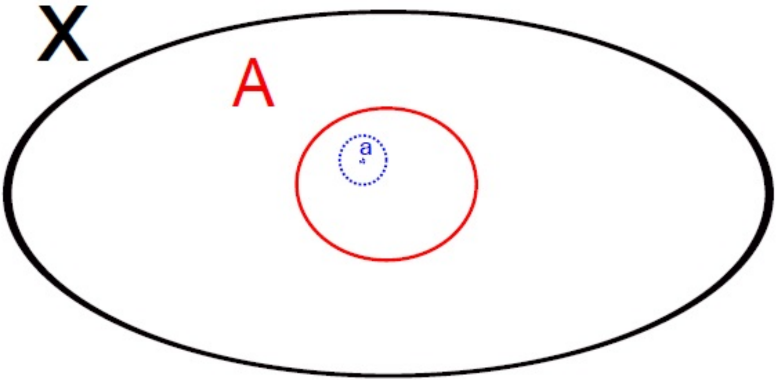
$$N(A, \epsilon) = \{x \in X : \text{existe un punto } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}.$$

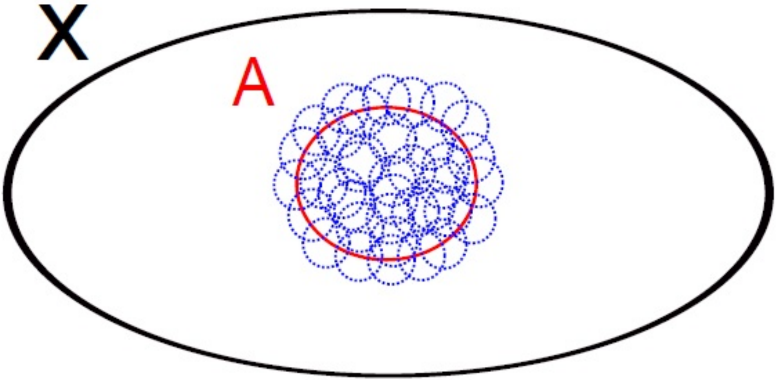
Notemos que

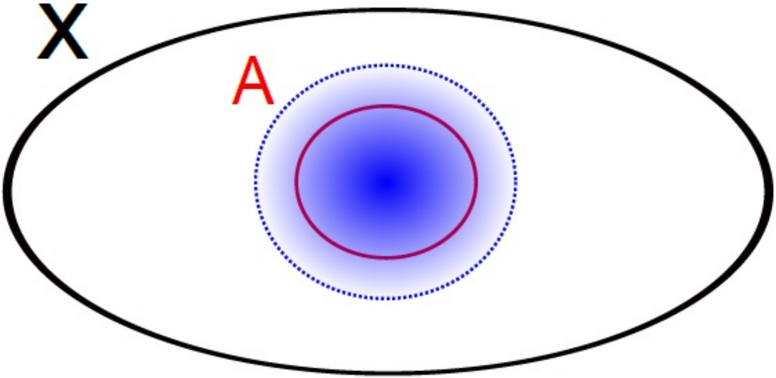
$$N(A, \epsilon) = \bigcup_{a \in A} B(\epsilon, a),$$

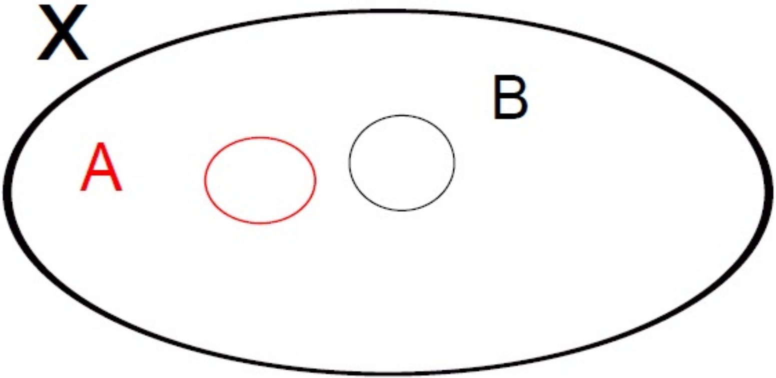
donde $B(\epsilon, a) = \{x \in X : d(a, x)\}$.

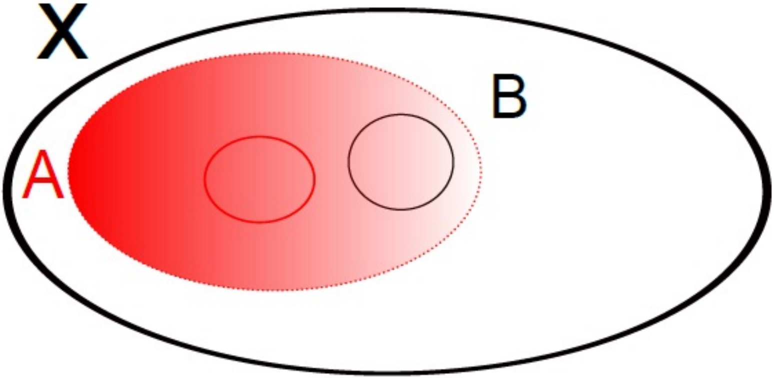

X
A

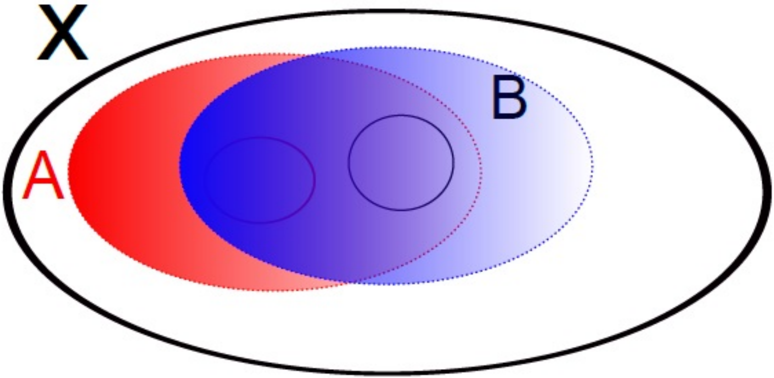

X
A
a


X
A


X
A


X
B
A


X
B
A


X
A
B

Si A y B son subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo X, definimos la **distancia de Hausdorff** entre A y B, como

$$H(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(B,\epsilon) \text{ y } B \subset N(A,\epsilon)\}.$$

Si A y B son subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo X, definimos la **distancia de Hausdorff** entre A y B, como

$$H(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(B,\epsilon) \text{ y } B \subset N(A,\epsilon)\}.$$

La idea intuitiva es que A y B se encuentran cerca si son casi iguales.

Si A y B son subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo X, definimos la **distancia de Hausdorff** entre A y B, como

$$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N(A, \epsilon)\}.$$

La idea intuitiva es que A y B se encuentran cerca si son casi iguales.
Se puede probar que H es una métrica en la familia de todos los conjuntos cerrados y no vacíos de X.

Dado un continuo X, consideramos los siguientes hiperespacios:

$$2^X = \{A \subset X : \ A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

y

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ conexo}\right\}.$$

Dado un continuo X, consideramos los siguientes hiperespacios:

$$2^X = \{A \subset X : \ A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

y

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ conexo}\right\}.$$

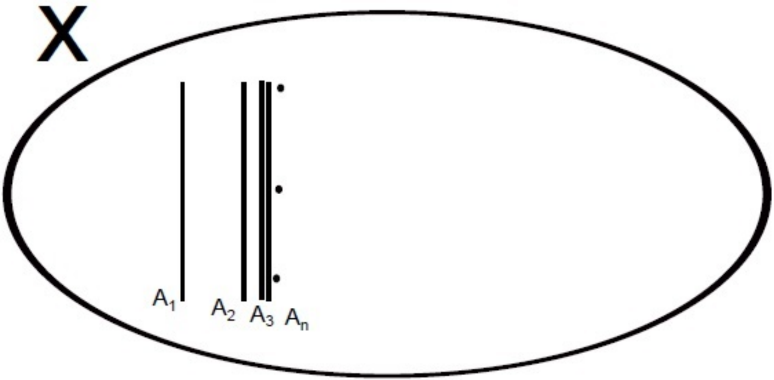
Con la métrica de Hausdorff 2^X es un continuo.

Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en 2^X tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, entonces para cada $a \in A$ existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que:

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, y
2. $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

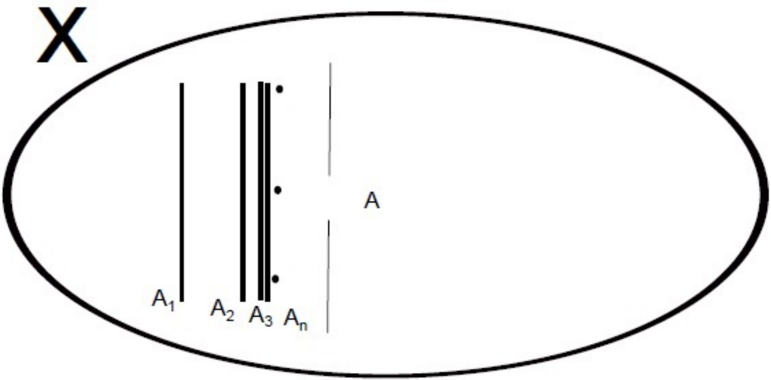
Teorema

Para cada continuo X, se cumple que $C(X)$ es un continuo.



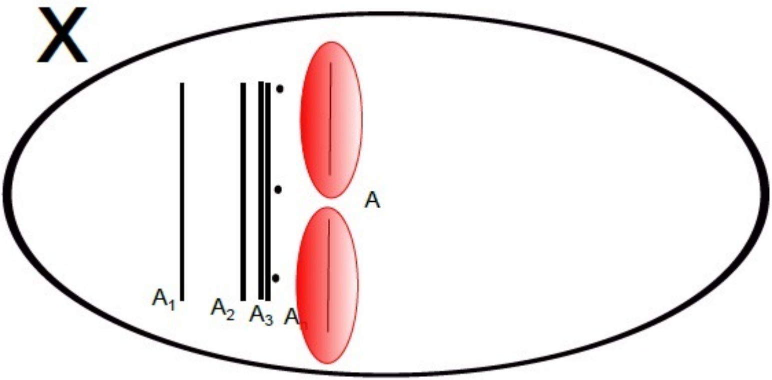
Teorema

Para cada continuo X, se cumple que $C(X)$ es un continuo.



Teorema

Para cada continuo X, se cumple que $C(X)$ es un continuo.



Si $X = [0,1]$.

$$C(X) = \{[a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Si $X = [0,1]$.

$$C(X) = \{[a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Consideramos $f : C(X) \to \mathbb{R}^2$ dada por $f([a,b]) = (a,b)$.

$$f(C(X)) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Si $X = [0,1]$.

$$C(X) = \{[a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Consideramos $f : C(X) \to \mathbb{R}^2$ dada por $f([a,b]) = (a,b)$.

$$f(C(X)) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

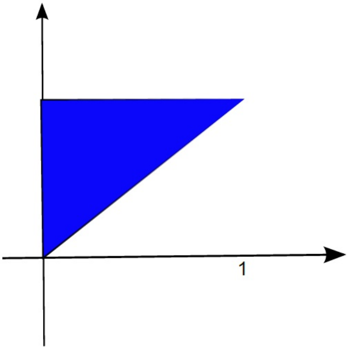
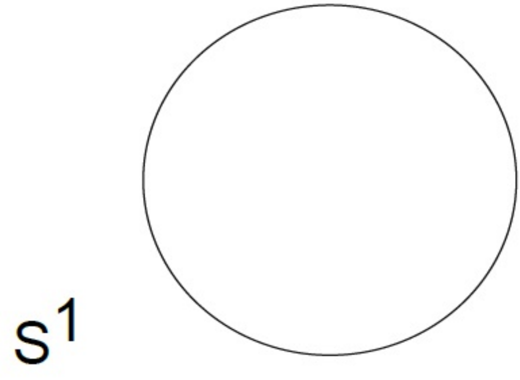
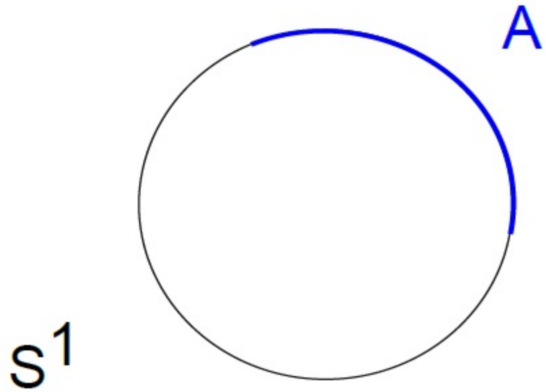


Figura: $C([0,1])$

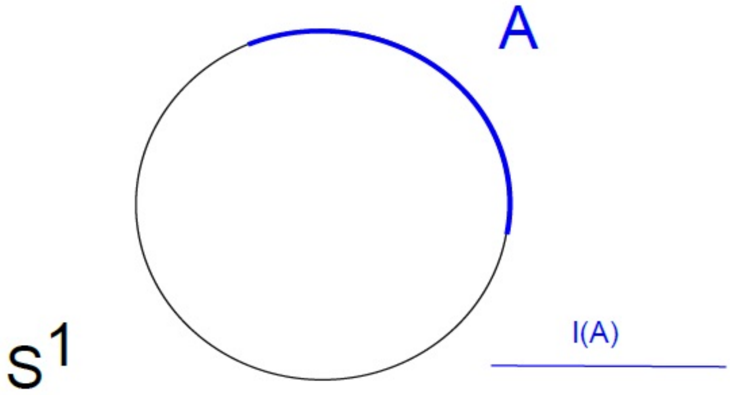
Si $X = S^1$.



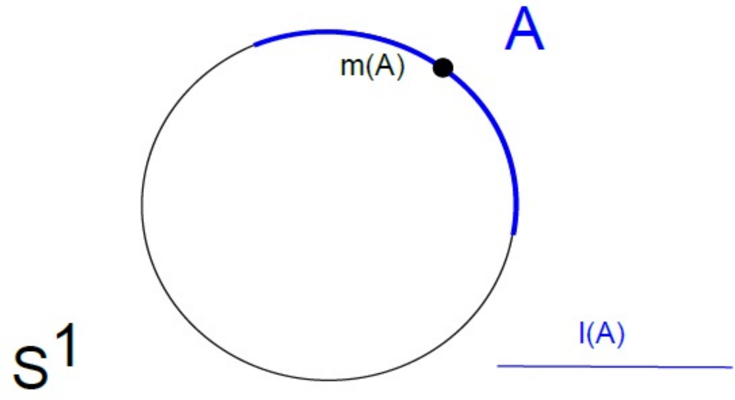
Si $X = S^1$.



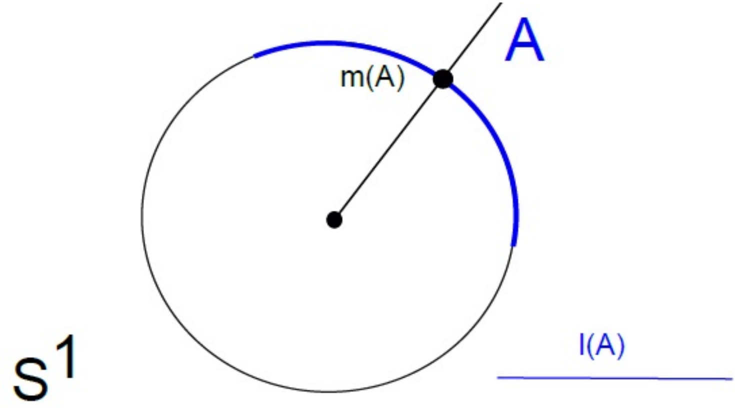
Si $X = S^1$.



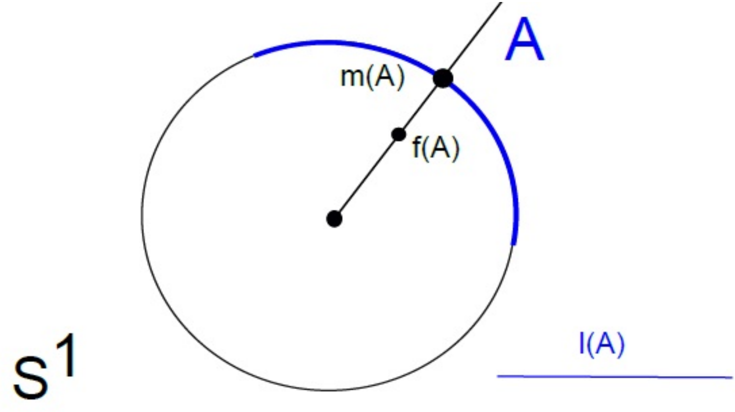
Si $X = S^1$.



Si $X = S^1$.



Si $X = S^1$.

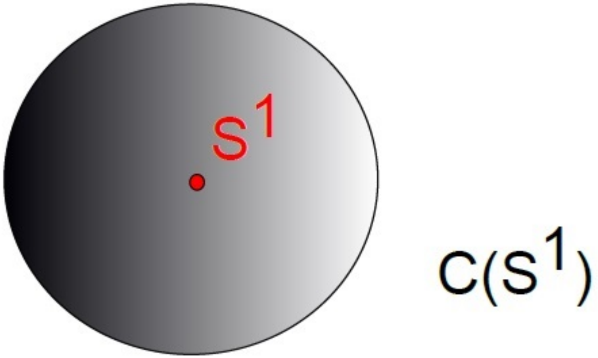


Definimos

$$f(A) = \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A),$$

para cada $A \in C(S^1)$.

Si $X = S^1$.



Dados un continuo X y $A \in C(X)$, se tiene que $C(A)$ es un continuo, es decir $C(A) \in C(C(X))$. Consideremos entonces

$$\mathfrak{C}(X) = \{C(A) : A \in C(X)\},$$

llamaremos a esta familia el *Hiperespacio de hiperespacios de* X, este espacio considerado como subespacio de $C(C(X))$.

Para un continuo X, definimos la función $C_X^* : C(X) \to \mathfrak{C}(X)$ dada por

$$C_X^*(A) = C(A), \text{ para cada } A \in C(X).$$

Para un continuo X, definimos la función $C^*_X : C(X) \to \mathfrak{C}(X)$ dada por

$$C^*_X(A) = C(A), \text{ para cada } A \in C(X).$$

Notemos que:

1. $\mathfrak{C}(X) = C^*_X(C(X))$,

Para un continuo X, definimos la función $C_X^* : C(X) \to \mathfrak{C}(X)$ dada por

$$C_X^*(A) = C(A), \text{ para cada } A \in C(X).$$

Notemos que:

1. $\mathfrak{C}(X) = C_X^*(C(X))$,
2. C_X^* es una función biyectiva,

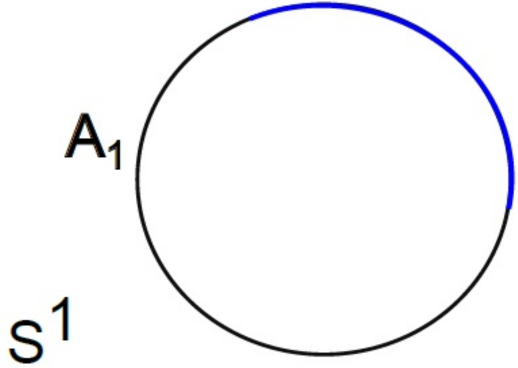
Para un continuo X, definimos la función $C_X^* : C(X) \to \mathfrak{C}(X)$ dada por

$$C_X^*(A) = C(A), \text{ para cada } A \in C(X).$$

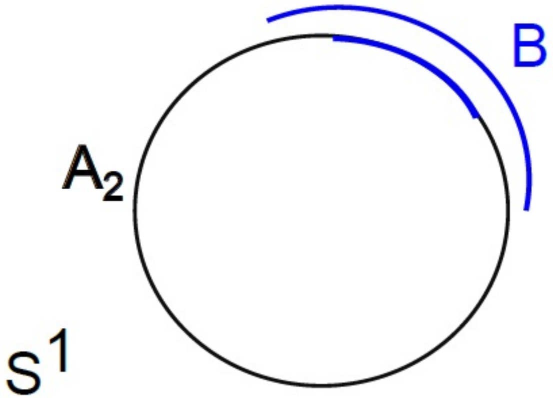
Notemos que:

1. $\mathfrak{C}(X) = C_X^*(C(X))$,
2. C_X^* es una función biyectiva,
3. si C_X^* fuese continua, entonces $C(X)$ sería homeomorfo a $\mathfrak{C}(X)$.

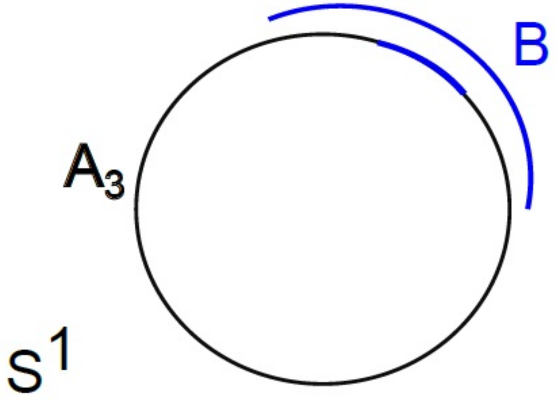
Si $X = S^1$.



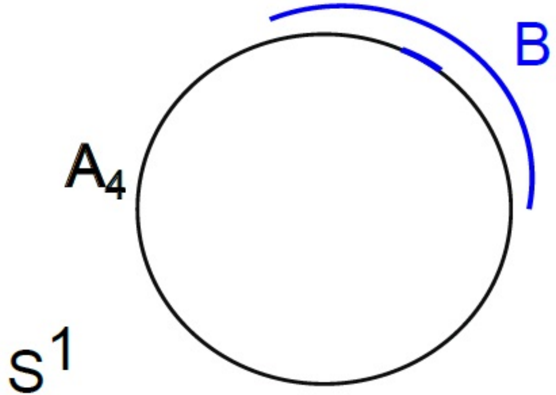
Si $X = S^1$.



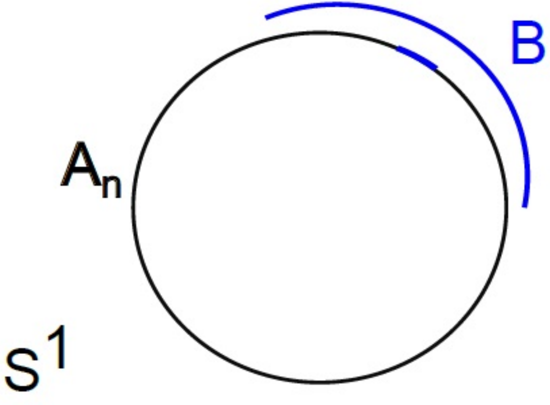
Si $X = S^1$.



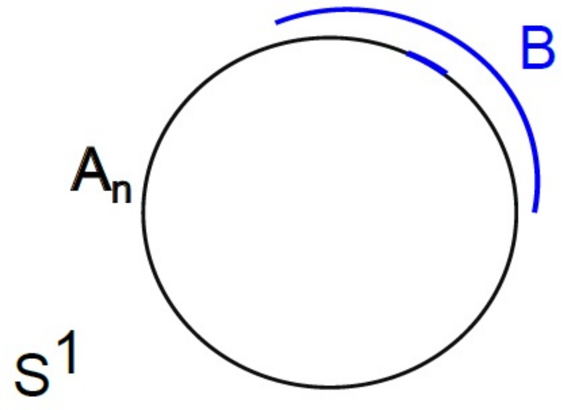
Si $X = S^1$.



Si $X = S^1$.

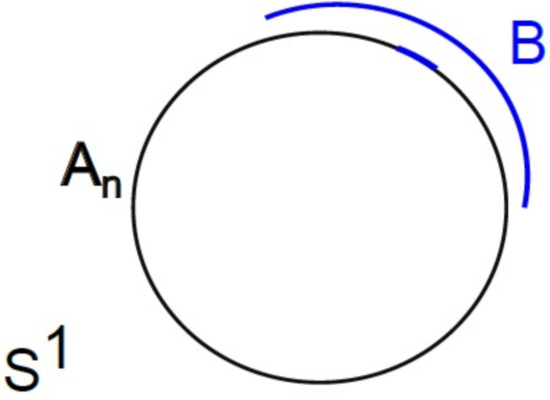


Si $X = S^1$.

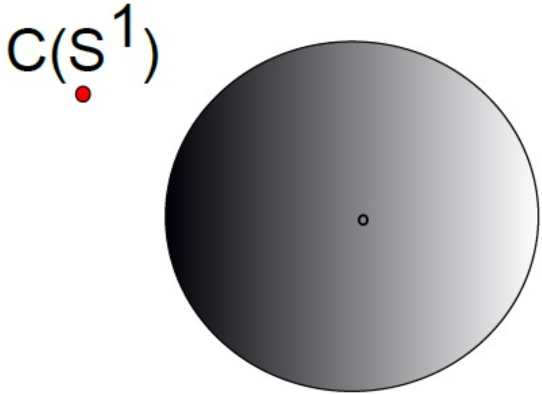


- $A_n \to S^1$,

Si $X = S^1$.



- $A_n \to S^1$,
- La sucesión $\{C(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $C(S^1)$, pues $B \in C(S^1)$ no es límite de puntos en los respectivos $C(A_n)$.



Modelo geométrico de $\mathfrak{C}(S^1)$.

Si X es un continuo y $C(A) \in \mathfrak{C}(X)$, $\bigcup C(A) = A$. Es decir si denotamos por $u_X : \mathfrak{C}(X) \to C(X)$ a la función tal que $u_X(C(A)) = \bigcup C(A) = A$, entonces $u_X = (C_X^*)^{-1}$.

Si X es un continuo y $C(A) \in \mathfrak{C}(X)$, $\bigcup C(A) = A$. Es decir si denotamos por $u_X : \mathfrak{C}(X) \to C(X)$ a la función tal que $u_X(C(A)) = \bigcup C(A) = A$, entonces $u_X = (C_X^*)^{-1}$.
La función u_X es continua, para cada continuo X.

Si X es un continuo y $C(A) \in \mathfrak{C}(X)$, $\bigcup C(A) = A$. Es decir si denotamos por $u_X : \mathfrak{C}(X) \to C(X)$ a la función tal que $u_X(C(A)) = \bigcup C(A) = A$, entonces $u_X = (C_X^*)^{-1}$.
La función u_X es continua, para cada continuo X.
Si $\{C(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $C(A)$ en $\mathfrak{C}(X)$, entonces $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en $C(X)$.

Teorema

Si X es un continuo, son equivalentes las siguientes condiciones:

1. C_X^* *es continua,*
2. $\mathfrak{C}(X)$ *es un continuo,*
3. $\mathfrak{C}(X)$ *es compacto,*
4. $\mathfrak{C}(X)$ *es cerrado,*
5. $\mathfrak{C}(X)$ *es homeomorfo a* $C(X)$.

Si X es un continuo y $A \in C(X)$, entonces $C_A^* : C(A) \to \mathfrak{C}(A)$ cumple que

$$C_A^* = C_X^*|_{C(A)},$$

por tanto si C_X^* es continua, entonces C_A^* lo es.

Teorema

Si X es un continuo, $\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $C(X)$ si y sólo si $\mathfrak{C}(A)$ es homeomorfo a $C(A)$ para cada $A \in C(X)$; en particular X no contiene curvas cerradas simples.

Teorema

Si X es un continuo, $\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $C(X)$ si y sólo si $\mathfrak{C}(A)$ es homeomorfo a $C(A)$ para cada $A \in C(X)$; en particular X no contiene curvas cerradas simples.

Si X no contiene curvas cerradas simples, entonces C^*_X es continua?

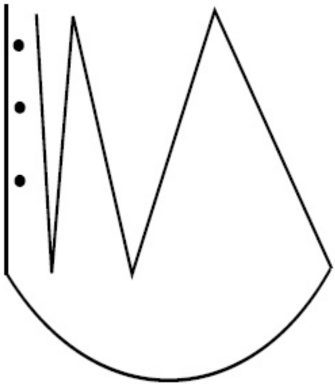


Figura: X

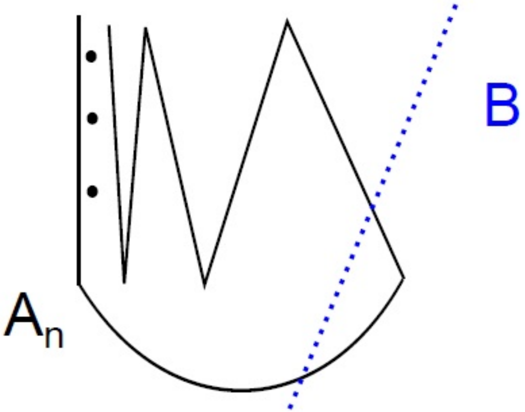


Figura: X

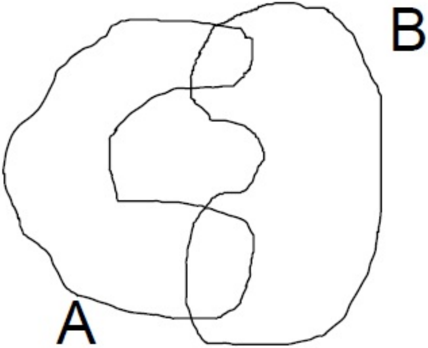
Definición

Un continuo X es ***unicoherente*** *si para cada par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se cumple que $A \cap B$ es conexo.*

Definición

Un continuo X es ***unicoherente*** *si para cada par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se cumple que $A \cap B$ es conexo.*

Es decir, no tiene la siguiente forma



Definición

Un continuo X es ***hereditariamente unicoherente*** *si para cada $A \in C(X)$, se cumple que A es unicoherente.*

Definición

Un continuo X es ***hereditariamente unicoherente*** *si para cada $A \in C(X)$, se cumple que A es unicoherente.*

Teorema

Si para un continuo X, C_X^* es continua, entonces X es hereditariamente unicoherente.

Definición

*Un continuo X es **hereditariamente unicoherente** si para cada $A \in C(X)$, se cumple que A es unicoherente.*

Teorema

Si para un continuo X, C_X^* es continua, entonces X es hereditariamente unicoherente.

Si X es hereditariamente unicoherente, entonces C_X^* es continua?

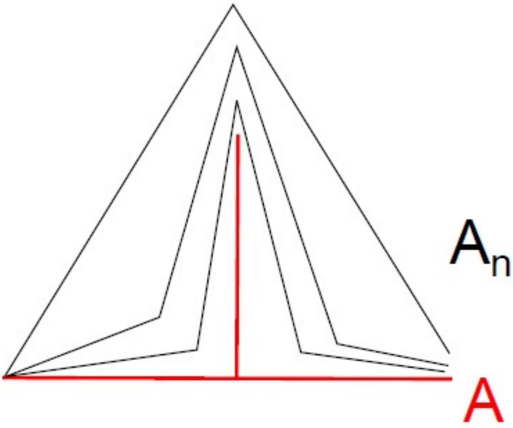


Figura: X

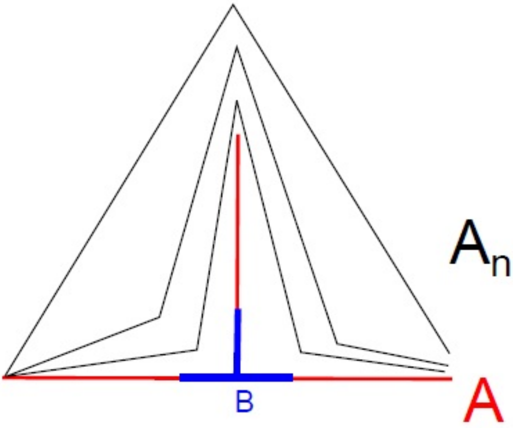


Figura: X

Un continuo X para el cual C_X^* es continua, se llama C^*-**suave**.

Un continuo X para el cual C_X^* es continua, se llama C^*-**suave**.

Cada continuo tipo arco es C^*-suave, la C^*-suavidad implica que un continuo es hereditariamente unicoherente. Si X es arco conexo, entonces X es un dendroide, además un continuo localmente conexo X es C^*-suave si y sólo si X es una dendrita.

No están caracterizados los continuos C^*-suaves.

Teorema

Si X y Y son C^*-suaves y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces $\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $\mathfrak{C}(Y)$.

En general si $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, esto no implica que $\mathfrak{C}(X)$ sea homeomorfo a $\mathfrak{C}(Y)$. Por ejemplo, esto ocurre cuando $X = [0,1]$ y $Y = S^1$.

Teorema

Sean X y Y dos continuos. Si X es C^*-suave y $\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $\mathfrak{C}(Y)$, entonces $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$.

Existen dos continuos X y Y tales que $\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $\mathfrak{C}(Y)$, pero $C(X)$ no es homeomorfo a $C(Y)$?

Se dice que un continuo X tiene hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$ si para cada continuo Y tal que $\mathfrak{C}(Y)$ es homeomorfo a $\mathfrak{C}(X)$, se cumple que Y es homeomorfo a X.

Teorema

Si X es homeomorfo a $[0,1]$ o a S^1, entonces X tiene hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$.

Si X tiene hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$, no necesariamente tiene hiperespacio único $C(X)$.

Si X tiene hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$, no necesariamente tiene hiperespacio único $C(X)$.

En la familia de los continuos C^*-suaves, un continuo X tiene hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$ si y sólo si tiene hiperespacio único $C(X)$.

Si X tiene hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$, no necesariamente tiene hiperespacio único $C(X)$.

En la familia de los continuos C^*-suaves, un continuo X tiene hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$ si y sólo si tiene hiperespacio único $C(X)$.

Cuáles son todos los continuos X con hiperespacio único $\mathfrak{C}(X)$?

Teorema

Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *X es homeomorfo a $[0,1]$,*
2. *$\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $[0,1]^2$,*
3. *$\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $[0,1]^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$,*
4. *$\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo al producto de continuos localmente conexos.*

Teorema

Paa un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

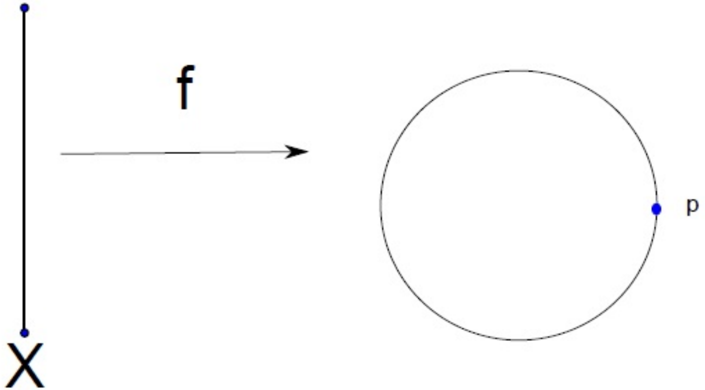
1. X *es homeomorfo a* S^1,
2. $\mathfrak{C}(X)$ *es homeomorfo a la unión del disco unitario* D *en el plano* $\mathbb{R}^2$ *menos el punto* $(0,0)$, *y* $\{q\}$ *donde* $q \in \mathbb{R}^2 - D$,
3. $\mathfrak{C}(X)$ *es localmente conexo, de dimensión dos y disconexo.*

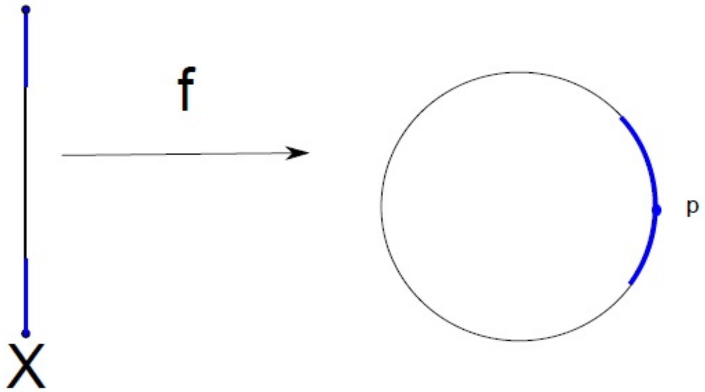
Funciones inducidas

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos.

Podemos definir la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ como $C(f)(A) = f(A)$ para cada $A \in C(X)$.

Es bien sabido que $C(f)$ es una función continua, si f es inyectiva entonces $C(f)$ es inyectiva. Sin embargo si f es suprayectiva, no necesariamente $C(f)$ lo es.


f
p
X


f
p
X

Definición

Una función $f : X \to Y$ *es llamada* ***débilmente confluente*** *si* $C(f)$ *es suprayectiva; es decir, si para cada* $B \in C(Y)$ *existe* $A \in C(X)$ *tal que* $f(A) = B$.

Definición

Una función $f : X \to Y$ es llamada ***débilmente confluente*** *si $C(f)$ es suprayectiva; es decir, si para cada $B \in C(Y)$ existe $A \in C(X)$ tal que $f(A) = B$.*

Definición

Una función $f : X \to Y$ es llamada ***hereditariamente débilmente confluente*** *si para cada $A \in C(X)$ se cumple que $f|_A : A \to f(A)$ es débilmente confluente.*

Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, es posible considerar

$$C(C(f)) : C(C(X)) \to C(C(Y)),$$

la función inducida por $C(f)$.

Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, es posible considerar

$$C(C(f)) : C(C(X)) \to C(C(Y)),$$

la función inducida por $C(f)$.
Si $\mathcal{A} \in C(C(X))$,

$$C(C(f))(\mathcal{A}) = C(f)(\mathcal{A}) = \{C(f)(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Consideremos la restricción de $C(C(f))$ a $\mathfrak{C}(X)$. Esta nueva función es continua, pero no es claro que su imagen sea $\mathfrak{C}(Y)$. Si $A \in C(X)$, entonces

$$C(C(f))(C(A)) = \{f(B) : B \in C(A)\},$$

Consideremos la restricción de $C(C(f))$ a $\mathfrak{C}(X)$. Esta nueva función es continua, pero no es claro que su imagen sea $\mathfrak{C}(Y)$. Si $A \in C(X)$, entonces

$$C(C(f))(C(A)) = \{f(B) : B \in C(A)\},$$

nos gustaría que $C(C(f))(C(A)) = C(f(A))$.

$C(C(f))|_{\mathfrak{C}(X)} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ *si y sólo si* f *es hereditariamente débilmente confluente.*

Si $f : X \to Y$, *definimos la función inducida* $\mathfrak{C}(f) : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$, *como* $\mathfrak{C}(f)(C(A)) = C(f(A))$, *para cada* $A \in C(X)$.

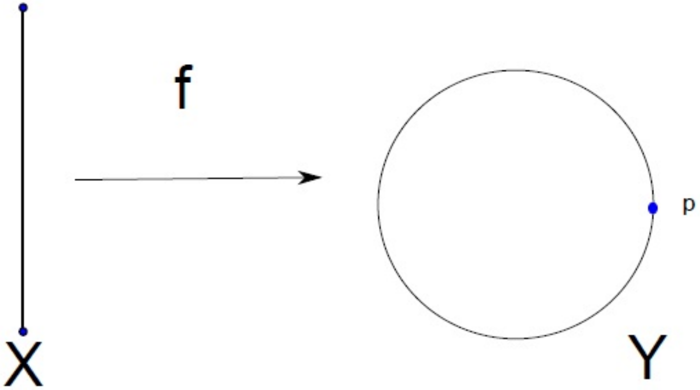


Figura: $\mathfrak{C}(f)$ no es continua

La función $\mathfrak{C}(f)$ hace que los siguientes diagramas conmuten.

$$
\begin{array}{ccc}
 & C(f) & \\
C(X) & \longrightarrow & C(Y) \\
C_X^* \downarrow & & \downarrow C_Y^* \\
\mathfrak{C}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(Y) \\
 & \mathfrak{C}(f) &
\end{array}
$$

y

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{C}(f) & \\
\mathfrak{C}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(Y) \\
\mathcal{U}_X \downarrow & & \downarrow \mathcal{U}_Y \\
C(X) & \longrightarrow & C(Y) \\
 & C(f) &
\end{array}
$$

Si $f : X \to Y$ es una función continua y tanto X como Y son C^*-suaves, entonces $\mathfrak{C}(f)$ es continua.

Teorema

$\mathfrak{C}(f)$ *es continua si* f *es hereditariamente débilmente confuente o bien* X *y* Y *son* C^**-suaves.*

Teorema

$\mathfrak{C}(f)$ es continua si f es hereditariamente débilmente confuente o bien X y Y son C^*-suaves.

Que hay con el regreso?

Dada una clase de funciones continuas $\mathcal{M}$, el problema general es determinar las relaciones entre las siguientes tres condiciones para una función continua $f : X \to Y$:

1. $f \in \mathcal{M}$,
2. $C(f) \in \mathcal{M}$,
3. $\mathfrak{C}(f) \in \mathcal{M}$

Por ejemplo, una función continua entre continuos $f : X \longrightarrow Y$, es llamada **monótona** si para cada $p \in Y$, se cumple que $f^{-1}(p)$ es un conjunto conexo.

Por ejemplo, una función continua entre continuos $f : X \longrightarrow Y$, es llamada **monótona** si para cada $p \in Y$, se cumple que $f^{-1}(p)$ es un conjunto conexo.

Es bien sabido que f es monótona si y sólo si $C(f)$ es monótona.

Por ejemplo, una función continua entre continuos $f : X \longrightarrow Y$, es llamada **monótona** si para cada $p \in Y$, se cumple que $f^{-1}(p)$ es un conjunto conexo.

Es bien sabido que f es monótona si y sólo si $C(f)$ es monótona.

Toda función monótona es débilmente confluente.

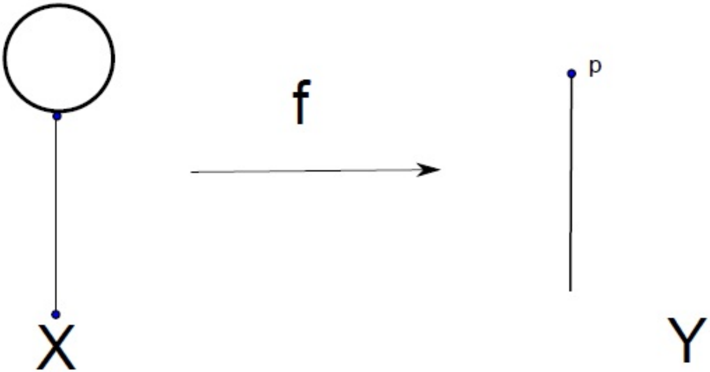
$$\begin{array}{ccc} & C(f) & \\ C(X) & \longrightarrow & C(Y) \\ C_X^* \downarrow & & \downarrow C_Y^* \\ \mathfrak{C}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(Y) \\ & \mathfrak{C}(f) & \end{array}$$

Del diagrama se sigue que si $\mathfrak{C}(f)$ es monótona, entonces $C(f)$ es monótona. En efecto si $A \in C(Y)$, entonces

$$C(f)^{-1}(A) = (u_X)(\mathfrak{C}(f)^{-1}(C(A)))$$

Si f es monótona, no necesariamente $\mathfrak{C}(f)$ es monótona.

Si f es monótona, no necesariamente $\mathfrak{C}(f)$ es monótona.



$\mathfrak{C}(f)^{-1}(C(\{p\})) = C(S^1)$, no es conexo.

$$\begin{array}{ccc} & C(f) & \\ C(X) & \longrightarrow & C(Y) \\ C_X^* \downarrow & & \downarrow C_Y^* \\ \mathfrak{C}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(Y) \\ & \mathfrak{C}(f) & \end{array}$$

Teorema

Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos C^*-suaves, entonces son equivalentes:

1. *f es monónotona,*
2. *$C(f)$ es monótona,*
3. *$\mathfrak{C}(f)$ es monótona.*

$$\begin{array}{ccc} & C(f) & \\ C(X) & \longrightarrow & C(Y) \\ C_X^* \downarrow & & \downarrow C_Y^* \\ \mathfrak{C}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(Y) \\ & \mathfrak{C}(f) & \end{array}$$

Teorema

Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos C^*-suaves, entonces son equivalentes:

1. *f es monónotona,*
2. *$C(f)$ es monótona,*
3. *$\mathfrak{C}(f)$ es monótona.*

En el teorema anterior es necesario únicamente que X sea C^*-suave.

Definición

Una función continua entre espacios topológicos $f : X \to Y$ es llamada ***abierta*** *si para cada abierto U de X, $f(U)$ es un conjunto abierto de Y.*

$$
\begin{array}{ccc}
C(X) & \xrightarrow{C(f)} & C(Y) \\
C_X^* \downarrow & & \downarrow C_Y^* \\
\mathfrak{C}(X) & \xrightarrow[\mathfrak{C}(f)]{} & \mathfrak{C}(Y)
\end{array}
$$

Teorema

Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos C^*-suaves, $C(f)$ es abierta si y sólo si $\mathfrak{C}(f)$ es abierta.

Las clases de funciones continuas definidas entre continuos más estudiadas son:

- abiertas
- casi interiores
- homeomorfismos
- confluentes
- débilmente confluentes
- hereditariamente débilmente confluentes
- semiconfluentes
- monótonas
- hereditariamente monótonas
- ligeras

- OM
- MO
- casi monótonas
- débilmente monótonas
- juntadoras
- localmente abiertas, monótonas o confluentes
- transitivas
- mezcladoras
- débilmente mezcladoras
- refinables
- **universales**
- etc.

Se han estudiado en el caso de las funciones inducidas $\mathfrak{C}(f)$, las clases de funciones, monótonas, confluentes, débilmente confluentes y ligeras.

GRACIAS