Cuadrados Mágicos y Geomágicos

Víctor Iván Soto Guerra

Escuela Superior de Física y Matemáticas - Instituto Politécnico Nacional

zub-zero13@hotmail.com

Seminario de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas - Universidad Autónoma de Chiapas

21 de abril del 2016

"Ancient sages influenced by the teachings of the like of Pythagoras of Samos believed that numbers and geometry hold within them the keys to nature. They are expressions of a Divine mind, a Universal Architect or Geometer. Numbers contain deep mystical meanings and powers that we can awaken and reawaken. In this cosmic view, magic squares are numerical illustrations of deep cosmic principles..."
Del libro *Occult Encyclopedia of Magic Squares*

Overview

Definición

Un cuadrado mágico de orden n es un arreglo de $n \times n$ enteros distintos, ordenados de tal forma que la suma de cualquier fila, renglón o columna principal es el mismo número, conocido como costante mágica.

En un cuadrado mágico normal tiene como elementos los enteros $1, 2, ...n^2$, su constante mágica está dada por:

$$M_2(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n(n^2+1)$$

Cuadrado mágico de Lo Shu

Descubierto en China al rededor del *año* 80 BC.

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Probemos que es único:

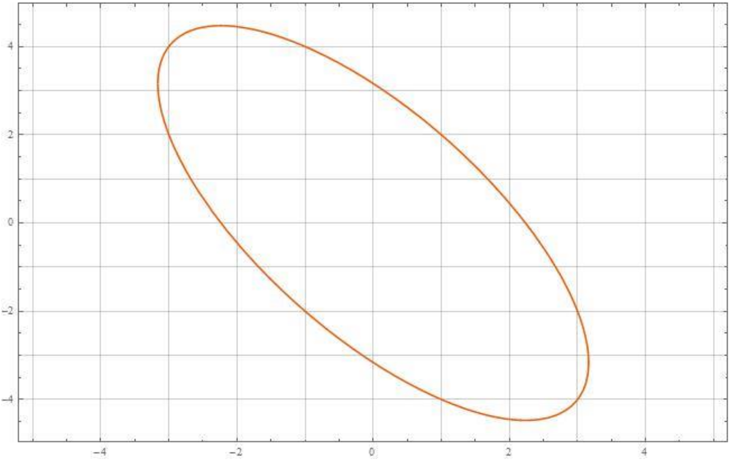
$$\begin{array}{ccc} Renglones: & Columnas & Diagonales \\ b_{11}+b_{12}+b_{13}=0 & b_{11}+b_{21}+b_{31}=0 & b_{11}+b_{22}+b_{33}=0 \\ b_{21}+b_{22}+b_{23}=0 & b_{12}+b_{22}+b_{32}=0 & b_{13}+b_{22}+b_{31}=0 \\ b_{31}+b_{32}+b_{33}=0 & b_{11}+b_{23}+b_{33}=0 & \end{array}$$

$b_{12} = -b_{32}$
$b_{13} = b_{32} + b_{33}$
$b_{22} = 0$
$b_{23} = -(b_{32} + 2b_{33})$

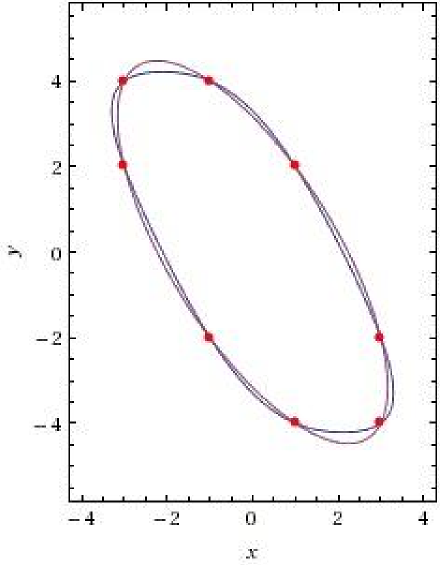
$$b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 + b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 60$$

$$2b_{32}^2 + 2b_{32}b_{33} + b_{33}^2 = 10$$

$$(-3,2),(-3,4),(-1,-2),(-1,4),(1,-4),(1,2),(3,-4),(3,-2)$$



$$6b_{32}^4 + 12b_{32}^3 b_{33} + 10b_{32}^2 b_{33}^2 + 4b_{32} b_{33}^3 + b_{32}^4 = 118$$



$$\psi_3(s) = \begin{cases} \frac{2}{9}s^2 + \frac{2}{3}s + 1, & \text{si 3 divide a } s \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

$$\psi_4(s) = \begin{cases} \frac{1}{480}s^7 + \frac{7}{240}s^6 + \frac{89}{480}s^5 + \frac{11}{16}s^4 + \frac{779}{48}s^3 + \frac{593}{240}s^2 + \frac{1051}{480}s + \frac{13}{16} \\ \text{si s es impar} \\ \frac{1}{480}s^7 + \frac{7}{240}s^6 + \frac{89}{480}s^5 + \frac{11}{16}s^4 + \frac{49}{30}s^3 + \frac{38}{15}s^2 + \frac{71}{30}s + 1, \\ \text{si s es par} \end{cases}$$

Note que estas funciones no excluyen rotaciones,reflexiones y normalidad.

Orden	Semi-Mágicos	Mágicos
3	9	1
4	68680	80
5	579 043 051 200	275 305 224
6	$9.4597 \pm 0.00013 \times 10^{22}$	$1.775399 \pm 0.00042 \times 10^{19}$
7	$4.2848 \pm 0.00017 \times 10^{38}$	$3.79809 \pm 0.0005 \times 10^{34}$
8	$1.0806 \pm 0.00012 \times 10^{59}$	$5.2225 \pm 0.00018 \times 10^{54}$
9	$2.9008 \pm 0.00022 \times 10^{84}$	$7.8448 \pm 0.0038 \times 10^{79}$
10	$1.4626 \pm 0.00016 \times 10^{115}$	$2.4149 \pm 0.0012 \times 10^{110}$

Construcción

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$8S + 4A + 2N + C$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 12 & 11 \\ 13 & 10 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 15 & 8 \\ 14 & 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Definición

Cuadrados mágicos de orden n:

$$M_n = \{y \in \mathbb{Z}^{n^2} : Ay = 0\}$$

Definición

El cono del conjunto M_n se define como todas las combinaciones lineales con coeficientes positivos y se denota por: C_{M_n}

Definición

Para cada cono C el conjunto S_C, es llamado el semigrupo del cono C.

Definición

Una base de Hilbert del cono C es un conjunto finito de puntos $HB(C)$ en el semigrupo S_C tales que cada elemento de S_C puede ser expresado como una combinacion lineal de elemento de $HB(C)$ con coeficientes enteros positivos.

Teorema(Hilbert)

Cada Cono C poliédrico con coeficientes racionales es generado por una base de Hilbert. Si C tiene al origen como su único vértice, existe una única base mínima que genera a C.

Base de los cuadrados mágicos de orden 4.

0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

h1

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

h2

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0

h3

0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

h4

0	1	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	0	0	0

h5

1	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0

h6

0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

h7

0	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
0	0	0	1

h8

1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	0	1
0	0	2	0

h9

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

h10

1	0	1	0
0	0	0	2
0	1	1	0
1	1	0	0

h11

0	0	2	0
0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	1

h12

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

h13

1	1	0	0
0	1	1	0
0	0	0	2
1	0	1	0

h14

1	0	0	1
0	0	1	1
1	0	1	0
0	2	0	0

h15

0	2	0	0
1	0	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1

h16

1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

h17

0	1	0	1
2	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

h18

1	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1

h19

0	0	1	1
0	1	1	0
2	0	0	0
0	1	0	1

h20

Melancolía I Alberto Durero (1514)

$$2h_1 + 10h_3 + 5h_4 + 2h_5 + 6h_6 + 8h_7 + h_8 = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Tour del Caballo

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Leonhard Euler

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

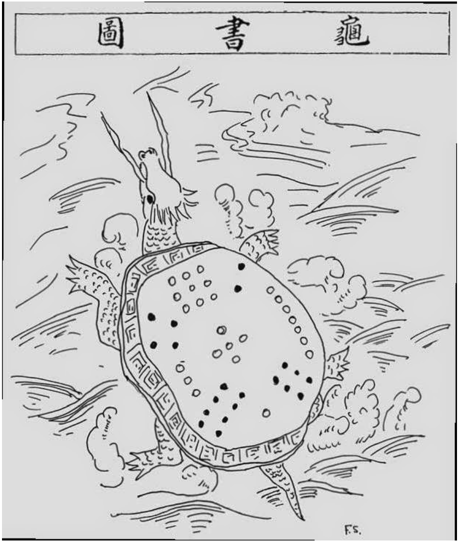
22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

Srinivasa Ramanujan

22 Diciembre 1887

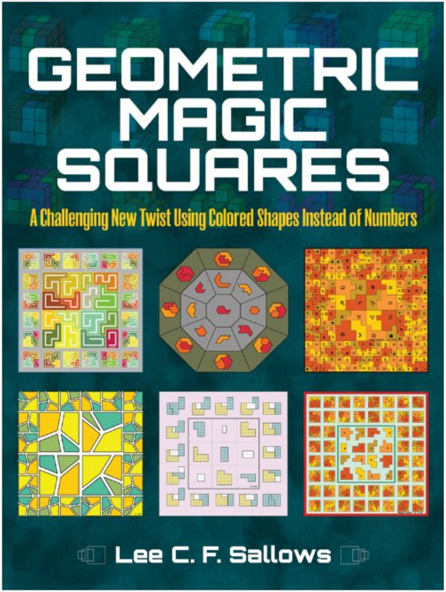
Lo shu de nuevo...

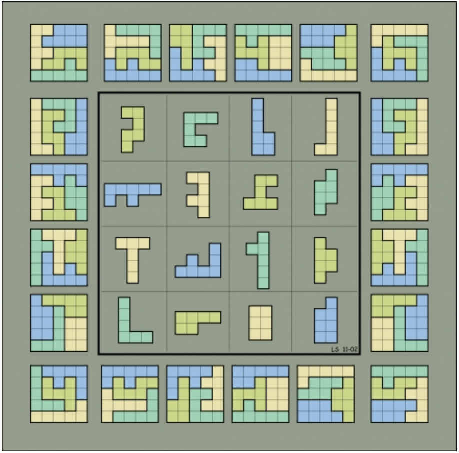


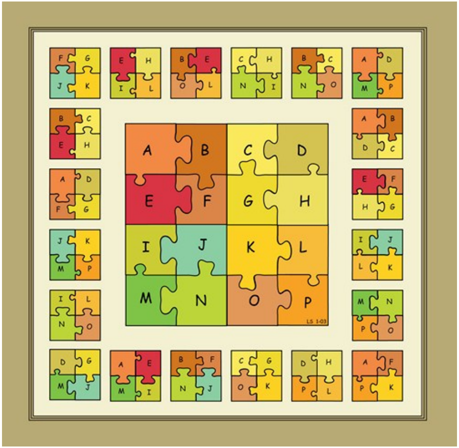
Definición

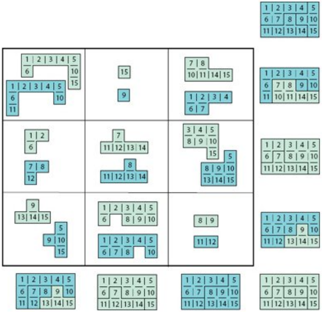
Un cuadrado mágico geométrico o geomágico de orden n es un arreglo de $n \times n$ figuras geométricas cuyo ensamblaje de cualquier columna, fila o diagonal principal sea el mismo.

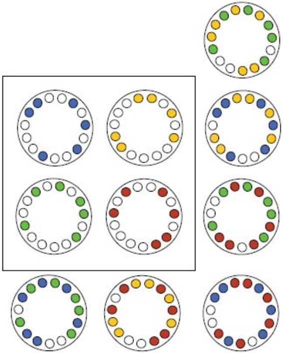
Lee Sallows

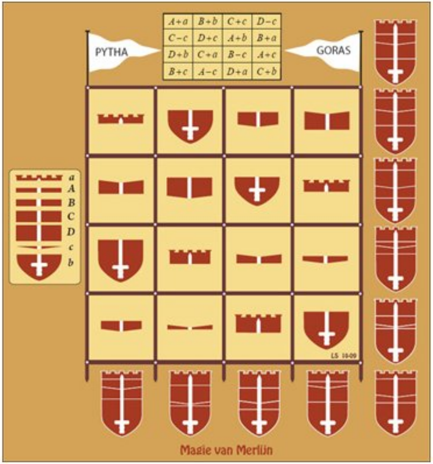

GEOMETRIC MAGIC SQUARES
A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers
Lee C. F. Sallows


LS 11-02


A B C D
E F G H
I J K L
M N O P
LS 1-03

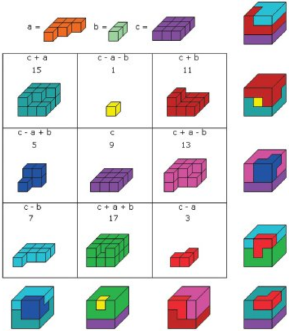


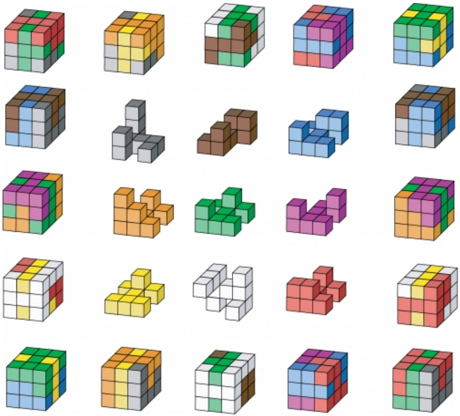




$A+a$	$B+b$	$C+c$	$D-c$
$C-c$	$D+c$	$A+b$	$B+a$
$D+b$	$C+a$	$B-c$	$A+c$
$B+c$	$A-c$	$D+a$	$C+b$

PYTHA
GORAS
a
A
B
C
D
c
b
Magie van Merlijn


a =
b =
c =
c + a
15
c - a - b
1
c + b
11
c - a + b
5
c
9
c + a - b
13
c - b
7
c + a + b
17
c - a
3



Referencias

- Maya Ahmed(2004): Algebraic Combinatorics of Magic Squares
- Jim Moran(1982): The Wonders of Magic Squares
- Lee CF Sallows(2013):Geometric Magic Squares

Objetivos a futuro

- Un programa que calcule triadas combinaciones conexas de cubos que formen un cubo $3 \times 3 \times 3$.
- Implementar CV para solucionar cuadrados geomágicos.
- Buscar cuadrados geomágicos 3D de distinto orden o figura.

Muchas gracias por su atención