FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

MODELACIÓN DE UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO MEDIANTE EL FORMALISMO DE EULER-LAGRANGE

Dr. Josué Enríquez-Zárate
Investigador
RTO *Energy*

CONTENIDO

- Introducción
- Modelo dinámico de la estructura tipo edificio
- Perturbación al sistema
- Descripción de la estructura experimental
- Análisis modal del sistema
- Control pasivo de vibraciones en la estructura tipo edificio
- Conclusiones

Introducción

- **Muchos sistemas en la realidad son modelados matemáticamente para ser analizados en un contexto “*off-line*”.**
- **Este planteamiento nos permite representar su comportamiento en el mundo real, considerando las variables y parámetros que intervienen en su funcionamiento.**
- **Estos modelos se suelen representar generalmente con elementos mecánicos como: resortes, masas y amortiguadores.**

Introducción

- Una forma idealizada de modelarlos, es considerando su zona de comportamiento **lineal**, lo que simplifica en muchos casos su análisis.
- Una de las herramientas físico-matemáticas más utilizadas en la ingeniería de control, es el conocido como método por energías o formalismo de Euler-Lagrange.
- Enfocada al análisis de sistemas de un orden superior de grados de libertad.

Ejemplos:

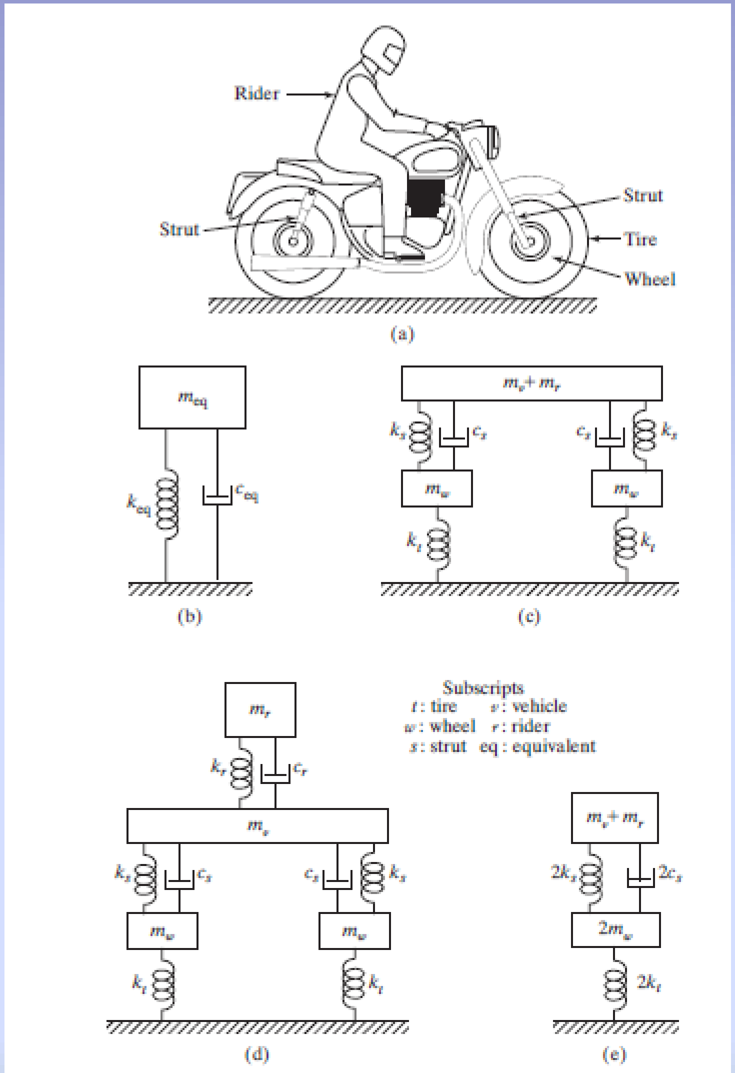
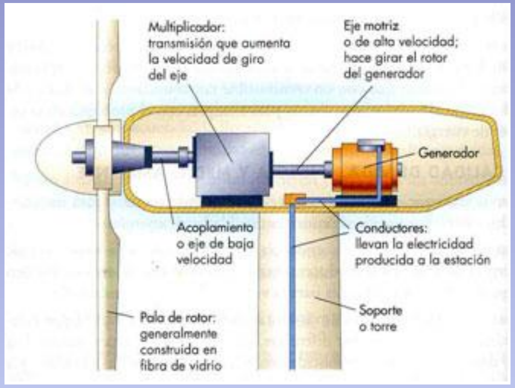


Figura 1: Sistema físico y modelo matemático
[Singiresu S. Rao, *Mechanical vibrations*, 2011]

Ejemplos:



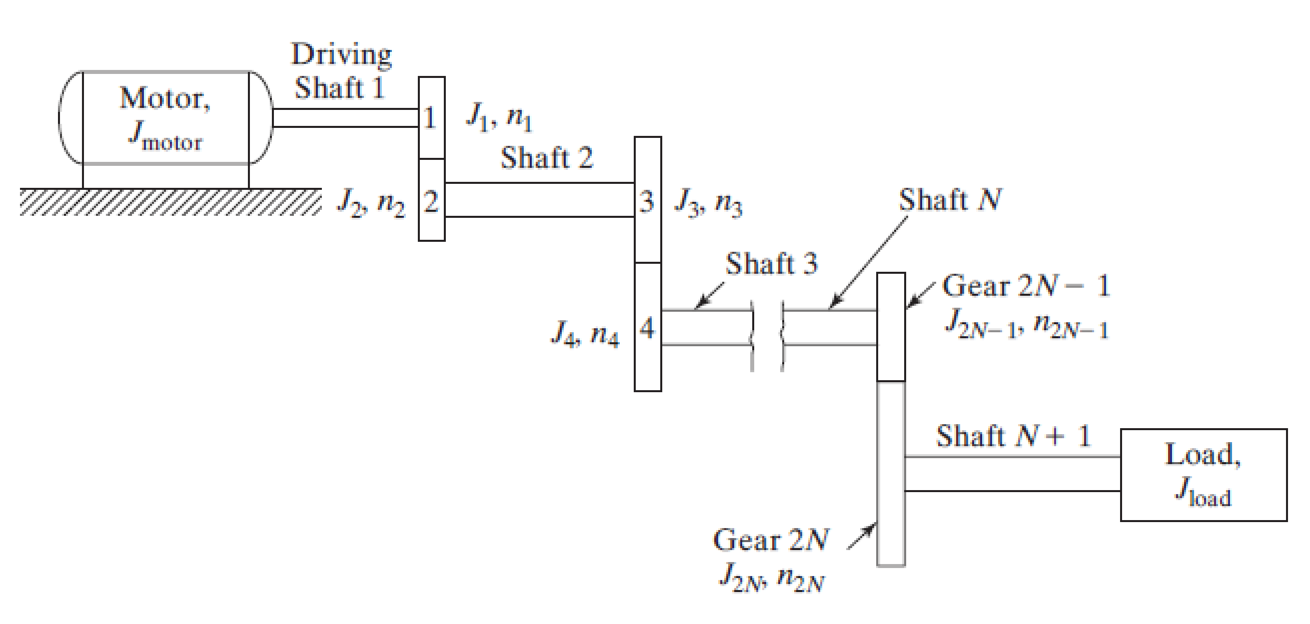


Figura 2: Sistema físico y modelo matemático
[Singiresu S. Rao, *Mechanical vibrations*, 2011]

Modelo dinámico

- **Función Lagrangiana:**

$$L = T - U$$

- **Energía cinética:**

$$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$

- **Energía potencial:**

Elástica $$U = \frac{1}{2} k y^2$$

$$U = \frac{1}{2} mgh$$ **Gravitatoria**

Modelo dinámico

- **Energía disipativa:**

$$R = \frac{1}{2} c \dot{y}^2$$

Formalismo Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = 0$$

Modelo dinámico

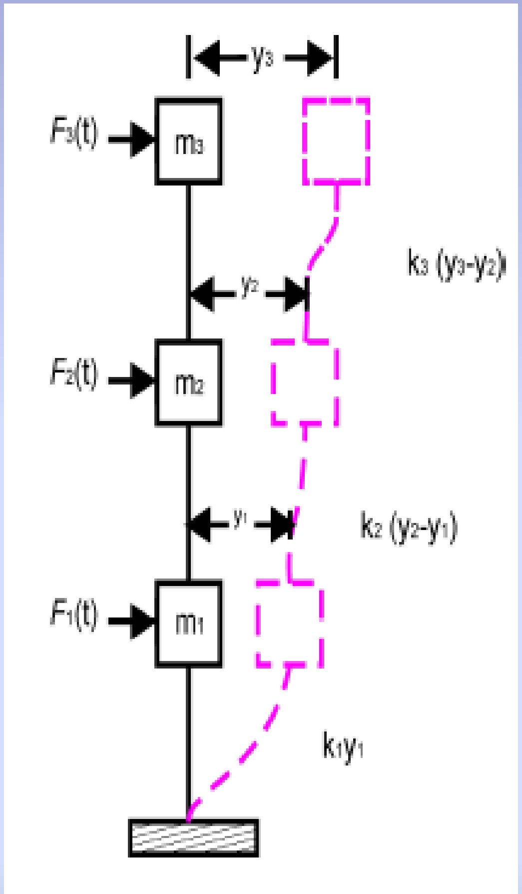


Figura 3: Modelo simplificado de una estructura perturbada

Modelo dinámico

- **Sistema de ecuaciones considerando la excitación de fuerzas independientes en cada uno de los pisos de la estructura tipo edificio.**

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2(y_2 - y_1) + c_1\dot{y}_1 - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = f_1$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) - k_3(y_3 - y_2) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) = f_2$$

$$m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) = f_3$$

Señal de perturbación al sistema:

- La presencia de señal exógenas como las vibraciones, que provocan el desplazamiento de toda la estructura, es generada por la acción de una fuera armónica suministrado por una *shaker* electromagnético, en la base de la estructura, términos de la aceleración.

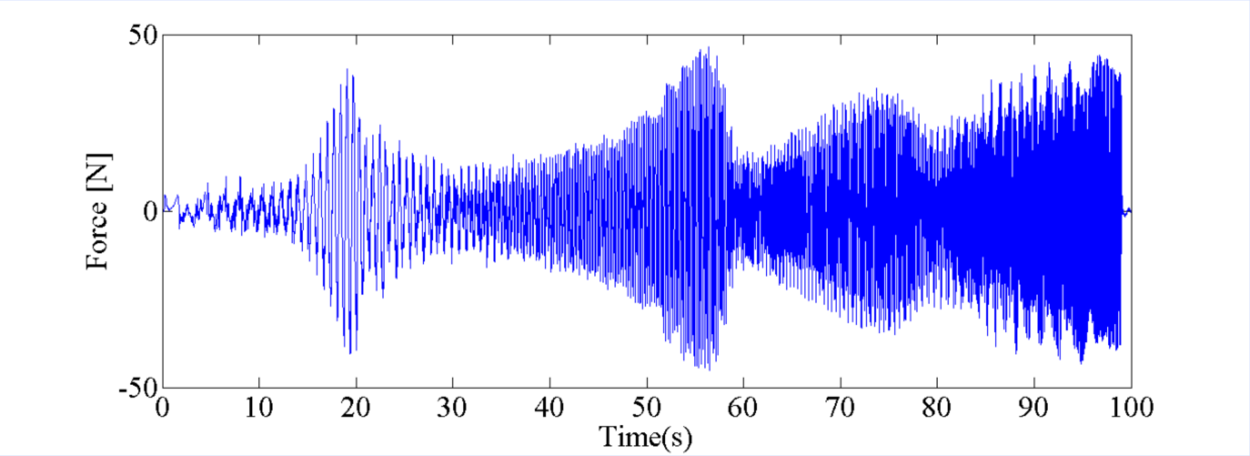


Figura 4: Fuerza de excitación en la base de la estructura

Señal de perturbación al sistema:

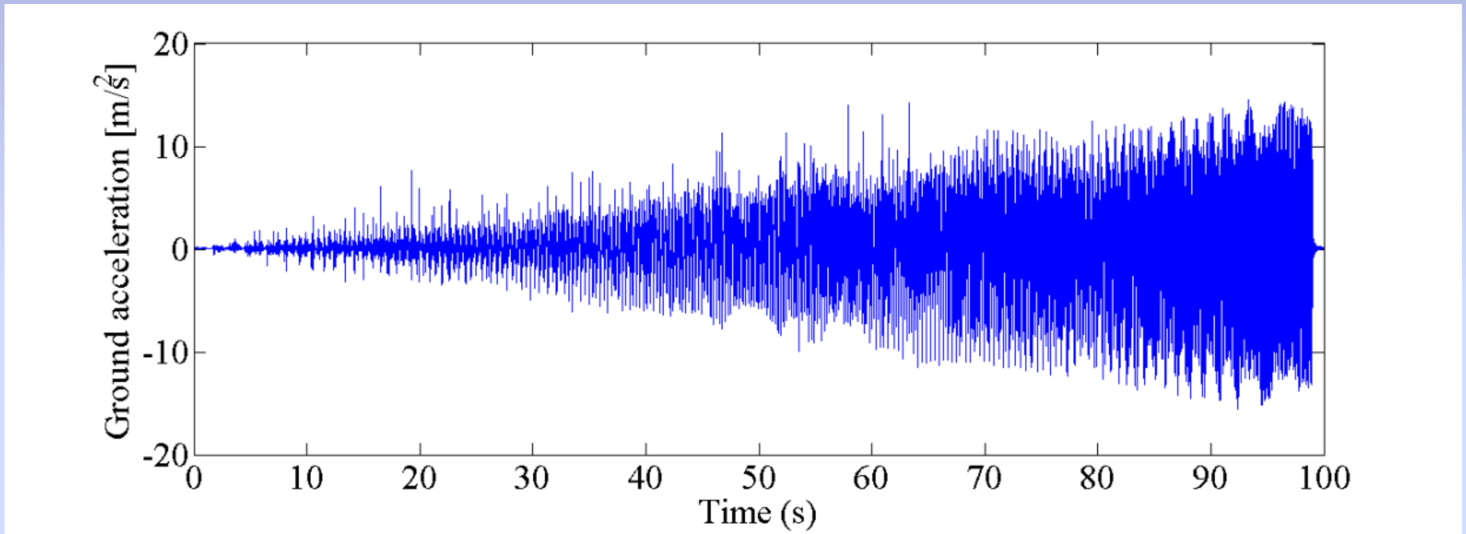


Figura 5: Fuerza de excitación en términos de la
aceleración en la base de la estructura

Descripción de la estructura experimental:

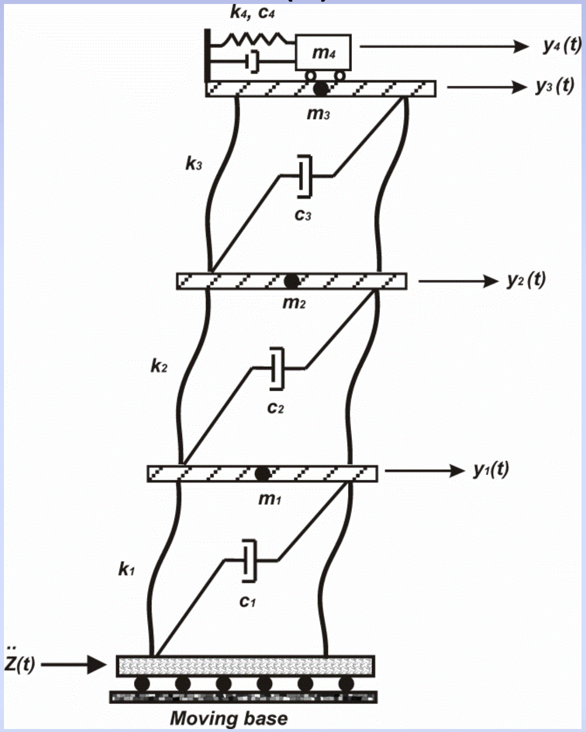
- La plataforma experimental esta compuesta por tres subsistemas:

a) Masa (pisos), resorte tipo columna (columnas) y los amortiguamientos
b) Sistema de adquisición de datos vía Compact DAQ de *National Instruments*®, y programas.
c) Acelerómetros y Shaker electromagnético.

Caso de estudio:

Estructura tipo edificio de tres pisos:

(a)



(b)

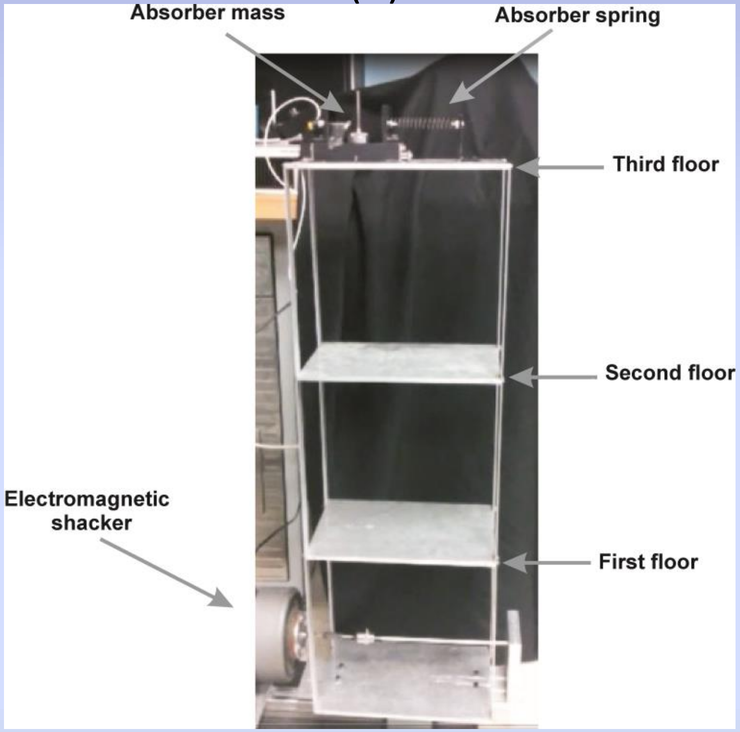


Figura 6: (a) Diagrama esquemático y (b) Plataforma experimental

Caso de estudio:

$$M_3\ddot{x}(t) + C_3\dot{x}(t) + K_3x(t) = -M_3e_3\ddot{z}(t),$$

$$z \in R,\ \ x \in R^3, e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \in R^3$$

Representación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Caso de estudio: Análisis Modal

Tabla I. Parámetros del sistema

$m_1 = 1.018kg$	$m_2 = 1.001kg$	$m_3 = 2.187kg$
$k_1 = 897.0277N/m$	$k_2 = 933.3893N/m$	$k_3 = 888.2334N/m$
$c_1 = 0.1233N/(m/s)$	$c_2 = 0.3345N/(m/s)$	$c_3 = 1.8977N/(m/s)$

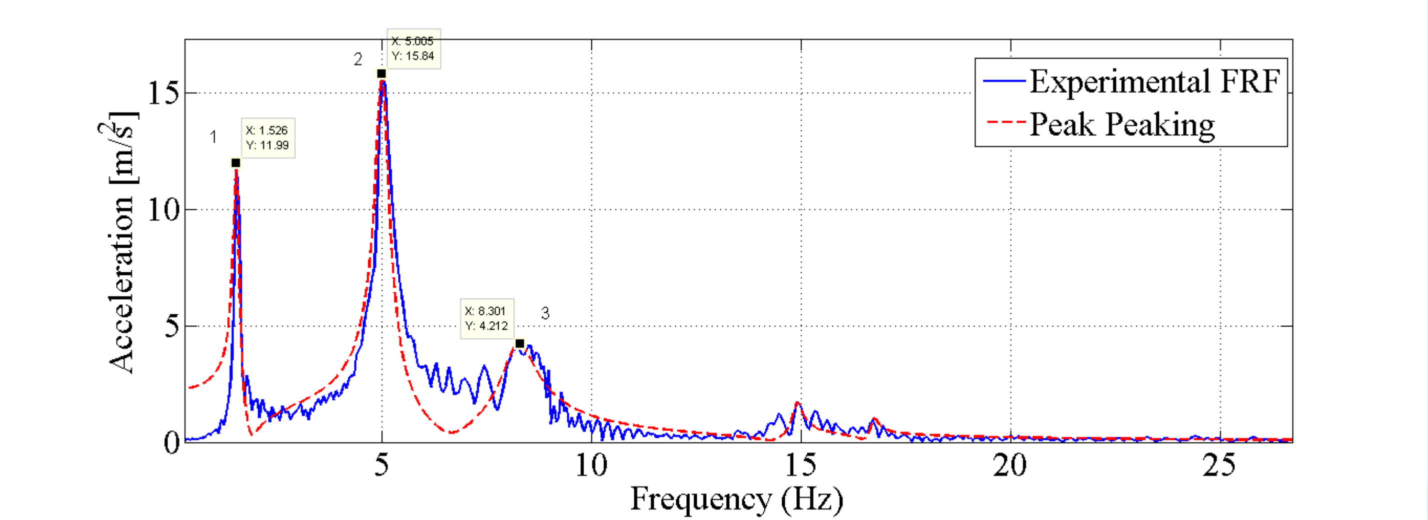


Figura 7: FRF experimental del sistema

Caso de estudio:

- Una tabla comparativa con las frecuencias resonantes tanto numéricos como experimentales de la estructura tipo edificio y sus amortiguamientos modales, se presentan en la Tabla II.

Tabla II. Parámetros modales de la estructura tipo edificio

Mode i	Resonance frequencies ω_i[Hz]		Modal damping ξ_i
	Numerical	**Experimental**	Experimental
1	1.6077	1.5260	0.0362
2	5.0621	5.0052	0.0295
3	8.0025	8.2402	0.0511

- Los resultados muestran que el modelo simple permite validar los primeros tres modos de vibración de la estructura.

Control pasivo de vibraciones:

- Los absorbedores de vibraciones son herramientas utilizadas con la finalidad de suprimir los efectos no deseados, debido a una excitación en los sistemas estructurales.
- La aplicación del control de vibraciones es aplicado para el análisis y control de estructuras como las civiles, que generalmente son excitadas por fuerzas exógenas como los vientos, temblores. Inducidas por tráfico en las grandes ciudades, trenes subterráneos, etc.
- Existen básicamente tres metodologías ampliamente utilizadas para el control de vibraciones:

1. **Control pasivo:** masa, resorte o amortiguamientos fijos
2. **Control semi-activo:** elementos ajustables.
3. **Control activo:** retroalimentación o pre-alimentación de señales (posición, velocidad, aceleración, etc).

Control pasivo de vibraciones:

Sistema de ecuaciones de la estructura tipo edificio con TMD (*Tuned-Mass-Damper*), colocado sobre el tercer piso:

$$M_4\ddot{y}(t) + C_4\dot{y}(t) + K_4 y(t) = -M_4 e_4 \ddot{z}(t), \qquad y \in R^4,$$

$$z \in R, \qquad e_4 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \in R^4$$

Representación en forma matricial

$$M_4 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

Control pasivo de vibraciones:

El TMD se diseña para atenuar el segundo modo de vibración localizado en $\boldsymbol{\omega_2 = 4.7913}$ Hz.

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_4}{m_4}}, \qquad j = 2$$

Los parámetros del sistema con TMD se presentan en la Tabla III.

Tabla III. Parámetros de la estructura tipo edificio con TMD

$m_1 = 1.018kg$	$m_2 = 1.001kg$	$m_3 = 1.340kg$	$m_4 = 0.848kg$
$k_1 = 897.0277N/m$	$k_2 = 933.3893N/m$	$k_3 = 888.2334N/m$	$k_4 = 723N/m$
$c_1 = 0.1233N/(m/s)$	$c_2 = 0.3345N/(m/s)$	$c_3 = 1.8977N/(m/s)$	$c_4 = 0.1920N/(m/s)$

Control pasivo de vibraciones:

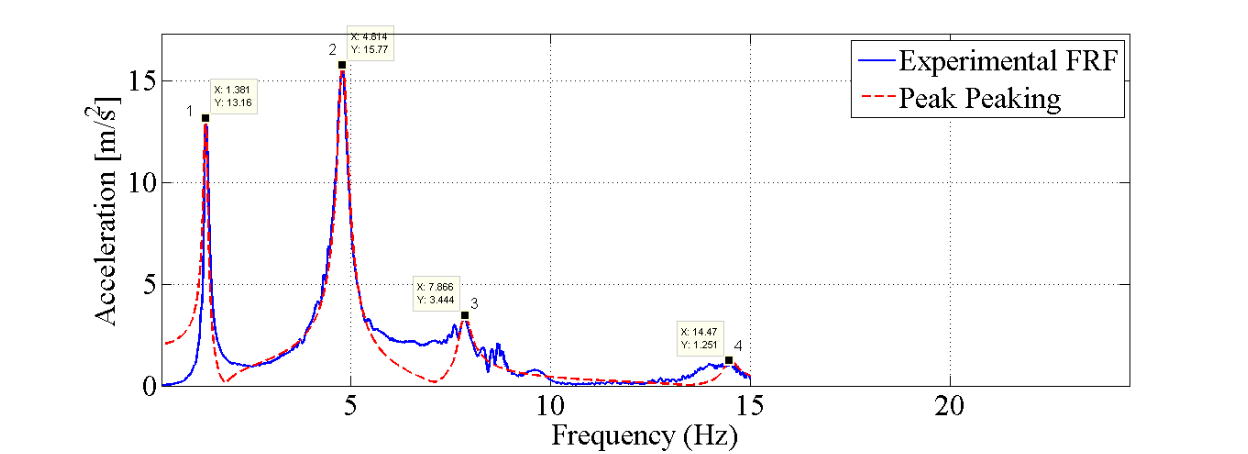


Figura 8: FRF experimental del sistema con TMD

Tabla IV. Resultados experimentales de la estructura con TMD

Mode i	Resonance frequencies ω_i[Hz] **Numerical**	**Experimental**	Modal damping ξ_i Experimental
1	1.5791	1.3886	0.0359
2	4.5448	4.7913	0.0254
3	6.4957	7.8507	0.0175
4	8.2182	13.9772	0.0010

Control pasivo de vibraciones:

La respuesta dinámica experimental del sistema implementando el TMD.

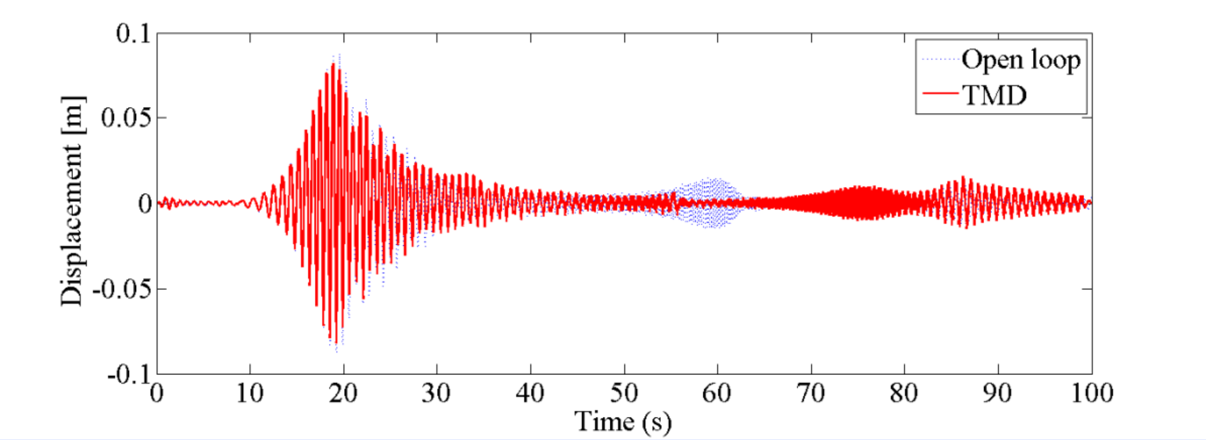


Figura 9: FRF experimental del sistema con TMD

La respuesta del sistema en el segundo modo es atenuado en un 91%.

Conclusiones:

- El modelado de sistemas de la vida real con el formalismo de *Euler-Lagrange* es viable y ampliamente utilizado.
- Las herramientas físico-matemáticas son ampliamente utilizadas para el control de sistemas reales.
- Los esquemas de control modal para la atenuación de vibraciones en estructuras con varios grados de libertad es de gran interés en la ingeniería estructural.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

MODELACIÓN DE UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO MEDIANTE EL FORMALISMO DE EULER-LAGRANGE

Dr. Josué Enríquez-Zárate
Investigador
RTO *Energy*