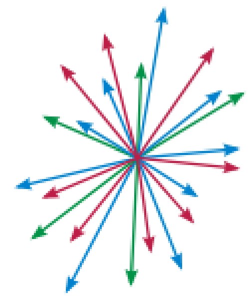
La búsqueda con álgebra lineal

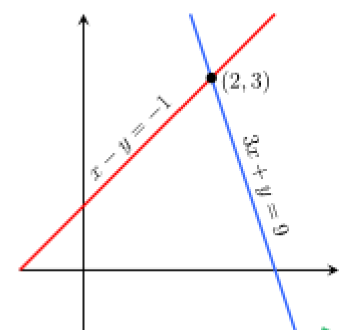
Gabriel Kantún Montiel
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
gkantun@fcfm.buap.mx

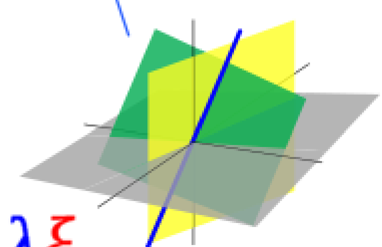
Álgebra … Lineal

- Vectores
- Matrices
- Líneas
- Espacios vector
- Valores propios



$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$





$$\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$$

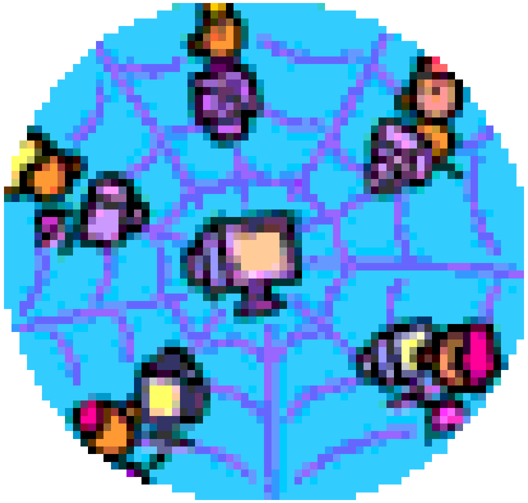
¡A conquistar el mundo!

hp
CISCO
YAHOO!
Sun microsystems

STANFORD
UNIVERSITY

¿Qué es Internet?

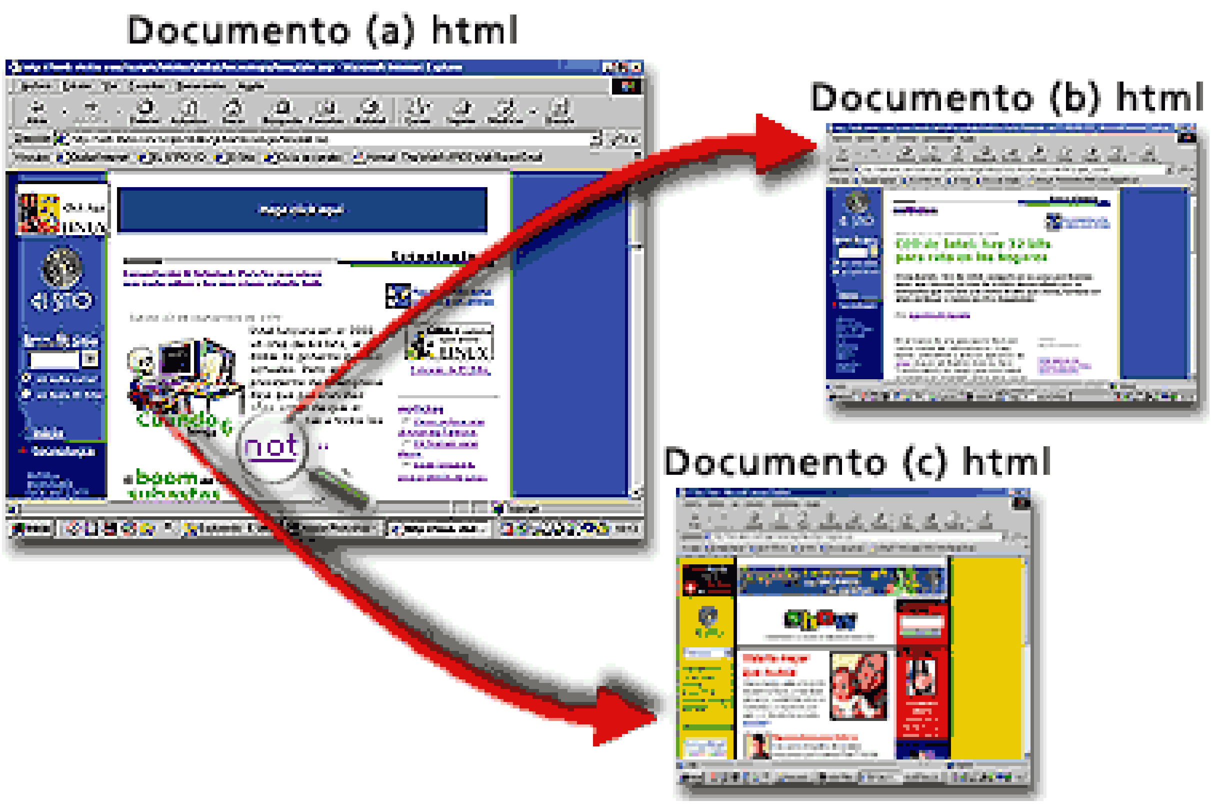
¿Qué es la Web?



Páginas Web

http://geniusware.zzl.org/images/diseno-web.jpg

Enlaces, vínculos, hipervínculos



http://www.definicionabc.com/wp-content/uploads/links.gif

Términos

Municipio
Tuxtla
Chiapas

Universidad
Chiapas
Ocelotes

Jaguares
Chiapas
Futbol

Ocelotes
Jaguares
Visita

¿Cómo representar los datos?

Matrices

Matriz de términos

$$
\begin{array}{l}
 & \text{Tuxtla} & \text{Universidad} & \text{Ocelotes} & \text{Visita} & \text{Jaguares} & \text{Municipio} & \text{Futbol} & \text{Chiapas} \\
\begin{array}{l}\text{Ayuntamiento}\\ \text{UNACH}\\ \text{Deportes}\\ \text{ZOOMAT}\end{array} & \multicolumn{8}{l}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Matriz de términos

Municipio
Tuxtla
Chiapas

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccccccc} \text{Tuxtla} & \text{Universidad} & \text{Ocelotes} & \text{Visita} & \text{Jaguares} & \text{Municipio} & \text{Futbol} & \text{Chiapas} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{Ayuntamiento} \\ \text{UNACH} \\ \text{Deportes} \\ \text{ZOOMAT} \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de términos

Universidad
Chiapas
Ocelotes

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccccc} \text{Tuxtla} & \text{Universidad} & \text{Ocelotes} & \text{Visita} & \text{Jaguares} & \text{Municipio} & \text{Futbol} & \text{Chiapas} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{Ayuntamiento} \\ \text{UNACH} \\ \text{Deportes} \\ \text{ZOOMAT} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de términos

$$
\begin{array}{l}
 \\
\text{Ayuntamiento} \\
\text{UNACH} \\
\text{Deportes} \\
\text{ZOOMAT}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\text{Tuxtla} & \text{Universidad} & \text{Ocelotes} & \text{Visita} & \text{Jaguares} & \text{Municipio} & \text{Futbol} & \text{Chiapas}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

¿Y ahora?

- Supongamos que queremos buscar

Universidad de Chiapas

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Tuxtla} & \text{Universidad} & \text{Ocelotes} & \text{Visita} & \text{Jaguares} & \text{Municipio} & \text{Futbol} & \text{Chiapas} \\ \left(0 \right. & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left. 1 \right) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1x0

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

1x0+0x1

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

1x0+0x1+0x0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

1x0+0x1+0x0+0x0+0x0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$1\times0+0\times1+0\times0+0\times0+0\times0+1\times0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

1x0+0x1+0x0+0x0+0x0+1x0+0x0+

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1&\boxed{0}&1\\0&1&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\\boxed{0}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}?\\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$1 \times 0+0 \times 1+0 \times 0+0 \times 0+0 \times 0+1 \times 0+0 \times 0+{\color{red}1 \times 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de búsqueda

Matriz de términos

Vector de resultados

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 \\ 2 \\ 1 \\ 0
\end{pmatrix}
$$

Matriz de términos

Vector de búsqueda

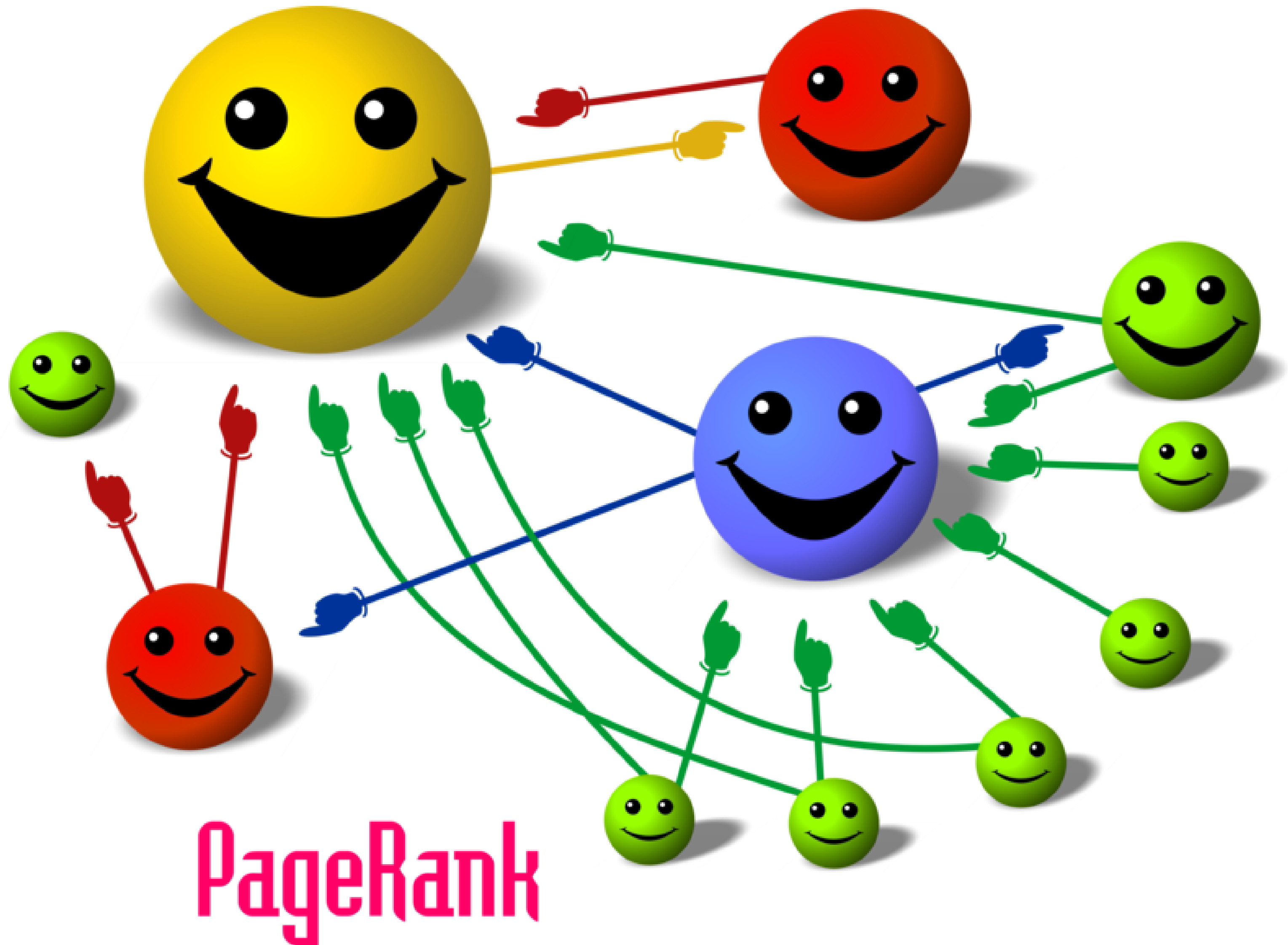
Vector de resultados

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
=
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 \\ 2 \\ 1 \\ 0
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\text{Ocurrencias en página 1} \\
\text{Ocurrencias en página 2} \\
\text{Ocurrencias en página 3} \\
\text{Ocurrencias en página 4}
\end{array}
\end{array}
$$

Para los términos Universidad Chiapas

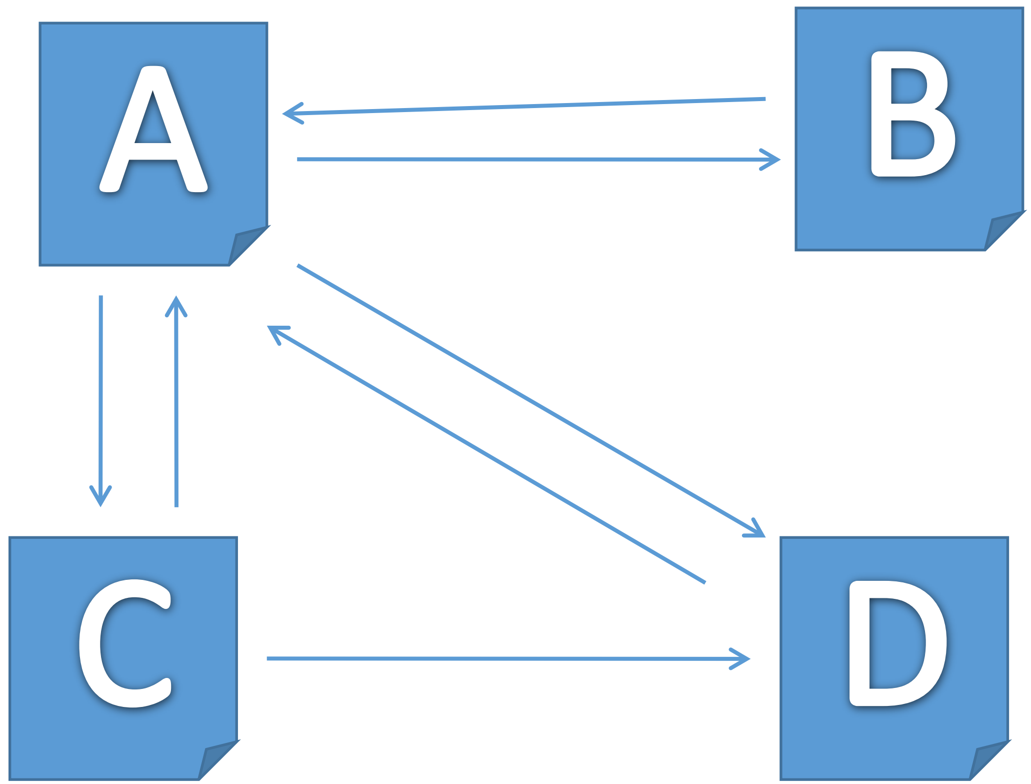
¿En qué orden los escribo?

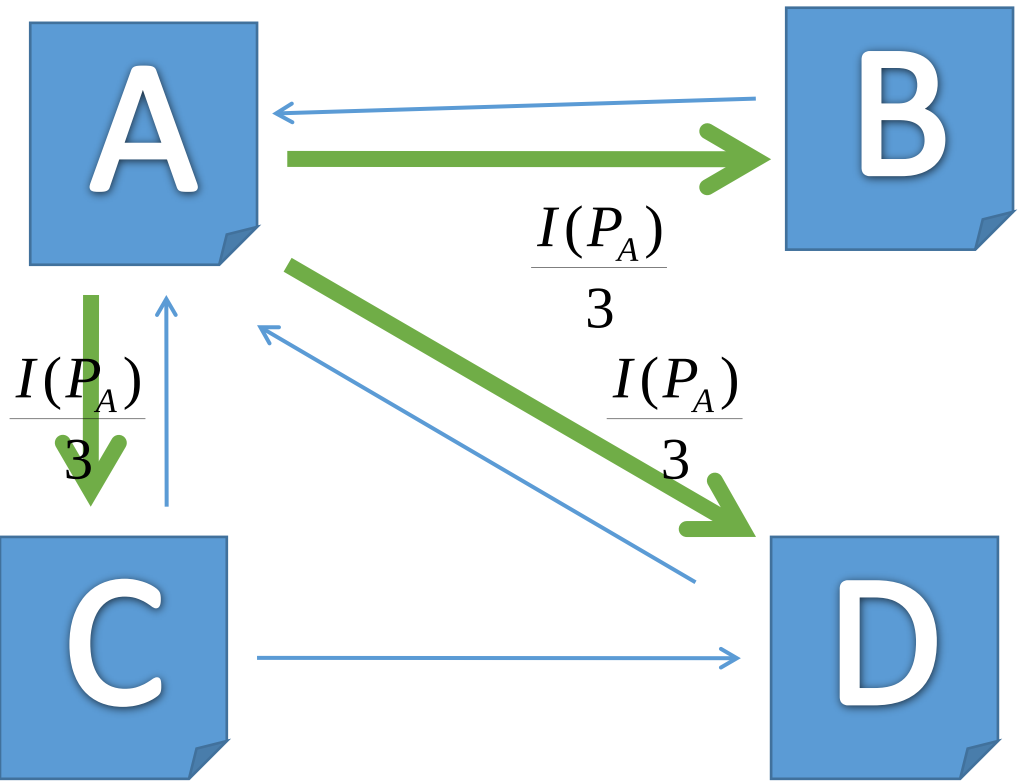
PageRank



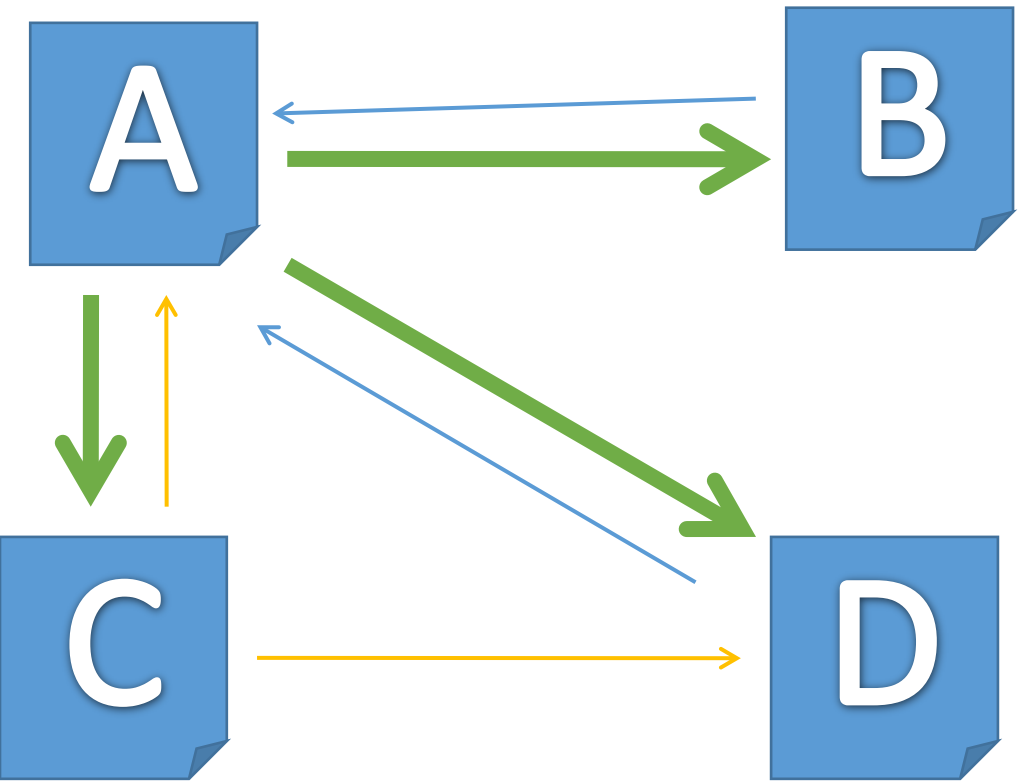
Enlaces

Links, Hyperlinks, Vínculos, Hipervínculos

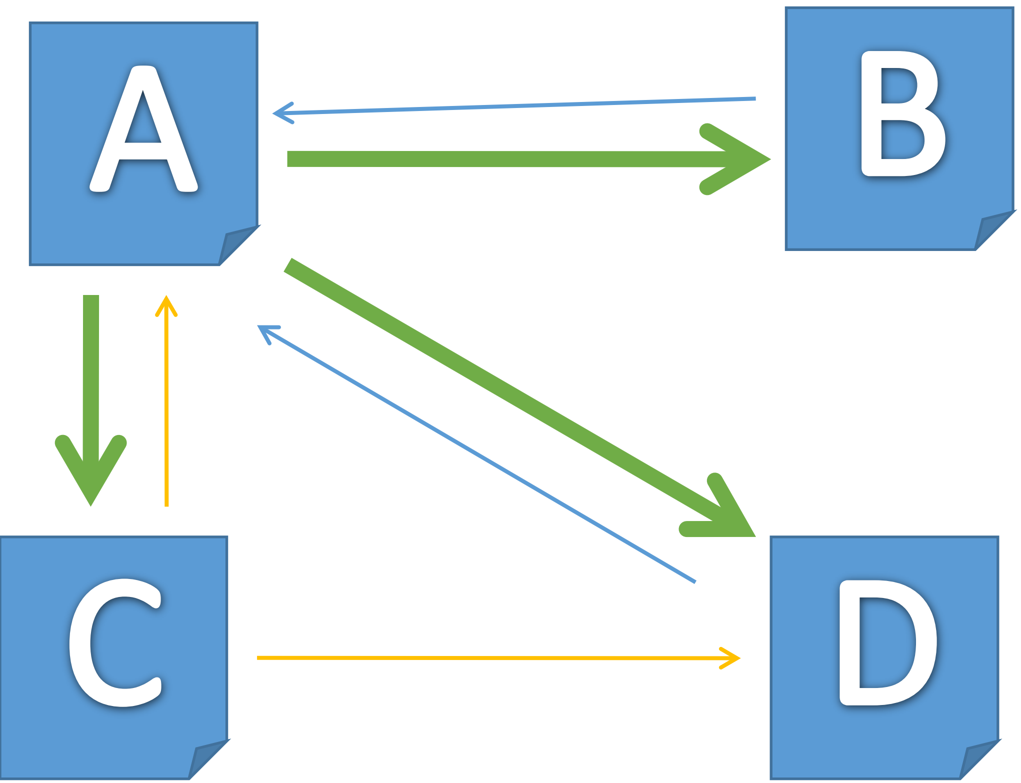

A
B
C
D



$$I(P_A)$$



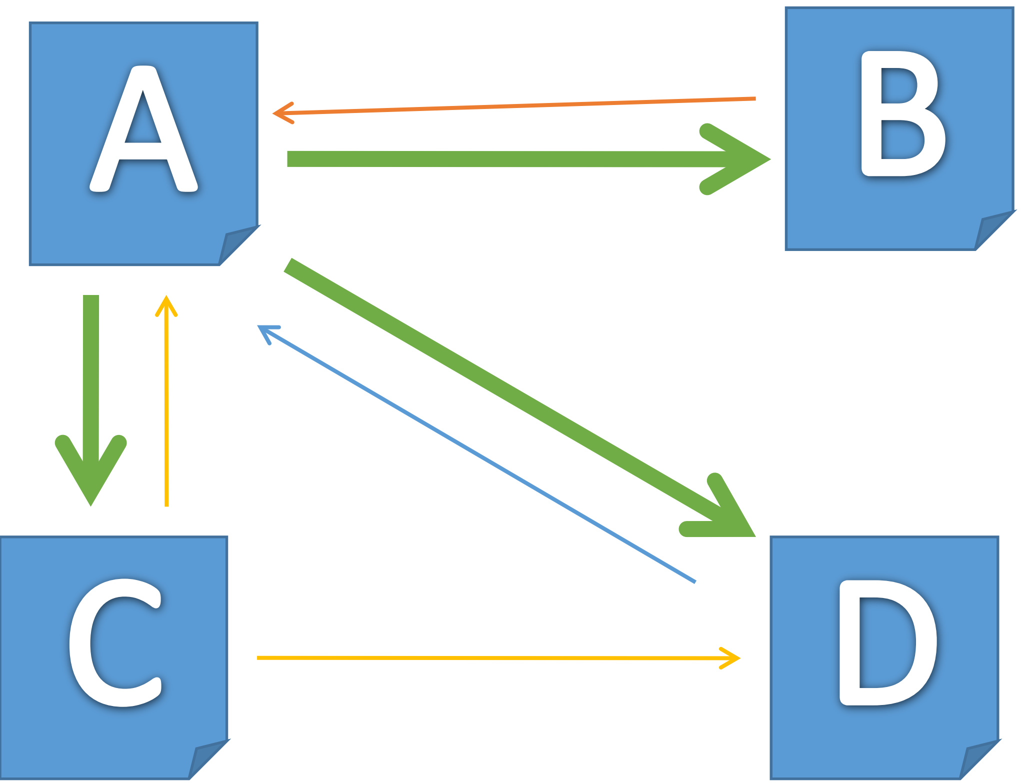
$$I(P_D) = \frac{I(P_A)}{3} + \frac{I(P_C)}{2}$$



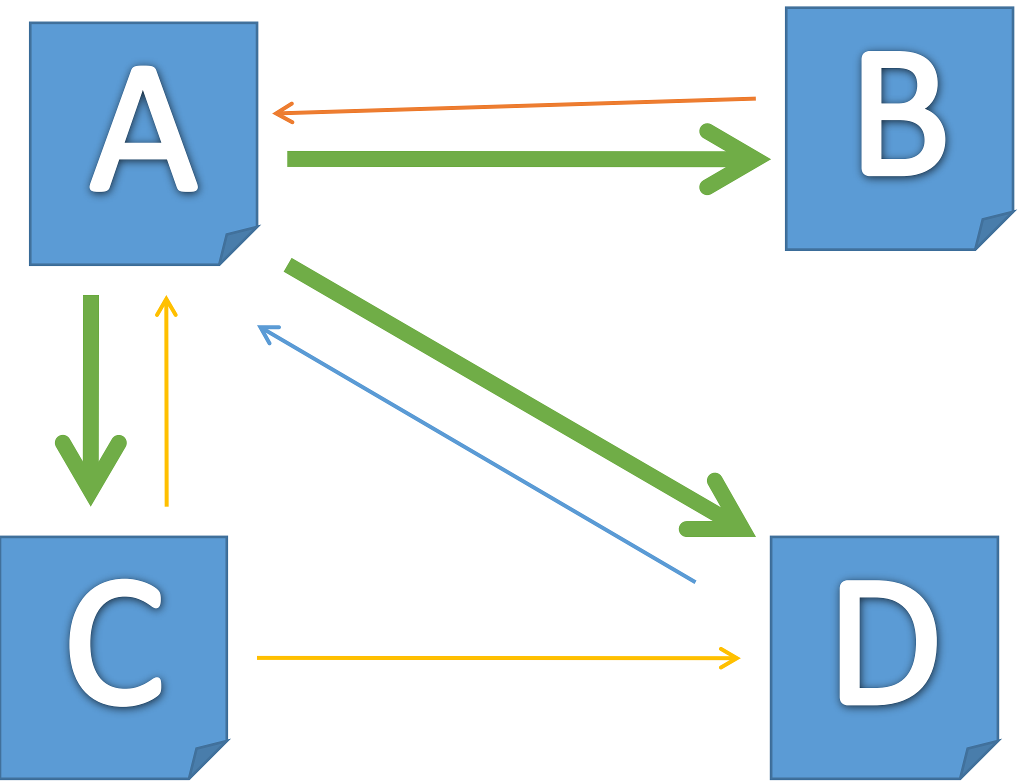
$$I(P_B) = \frac{I(P_A)}{3}$$

$$I(P_D) = \frac{I(P_A)}{3} + \frac{I(P_C)}{2}$$

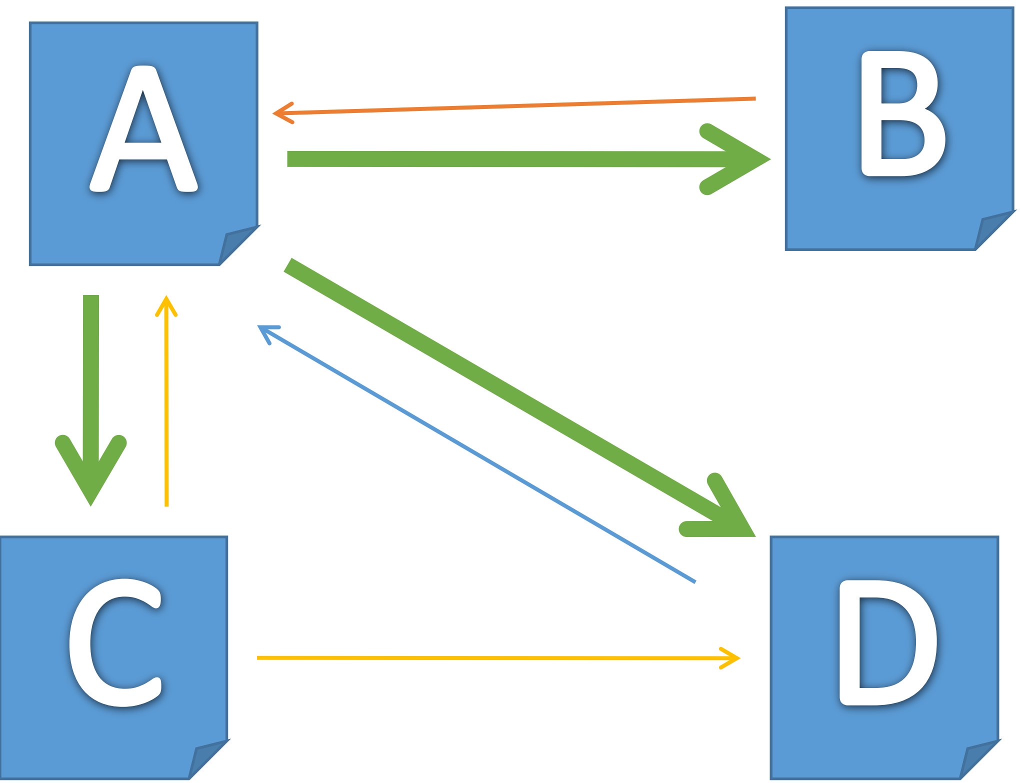
Matrices



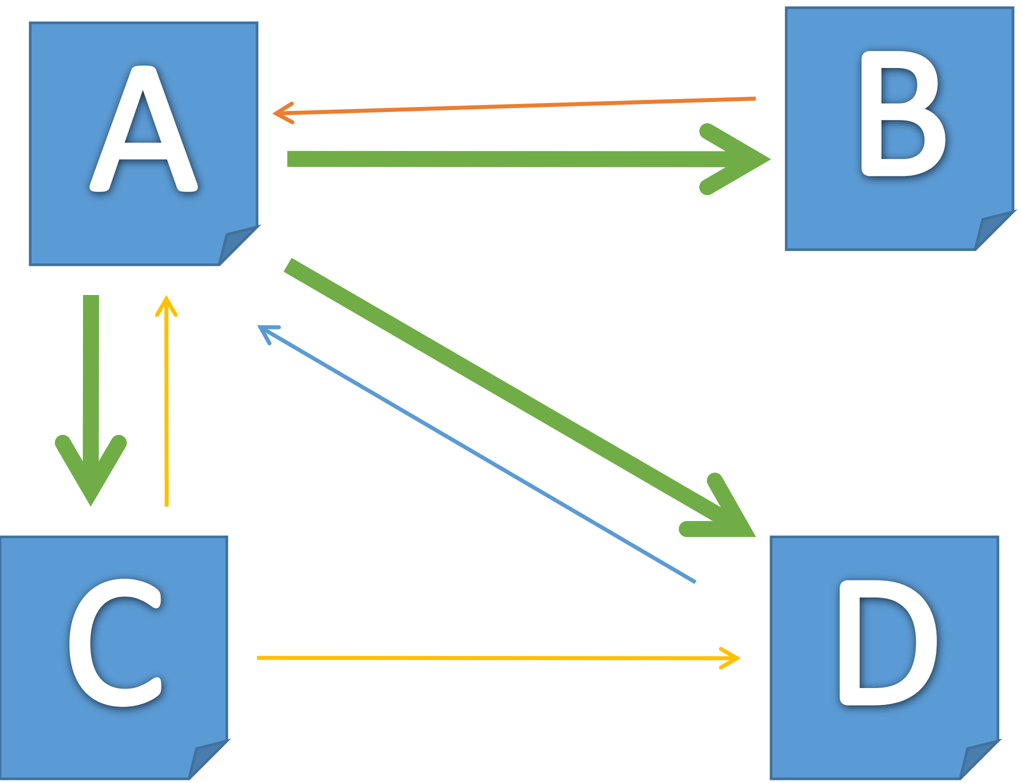
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



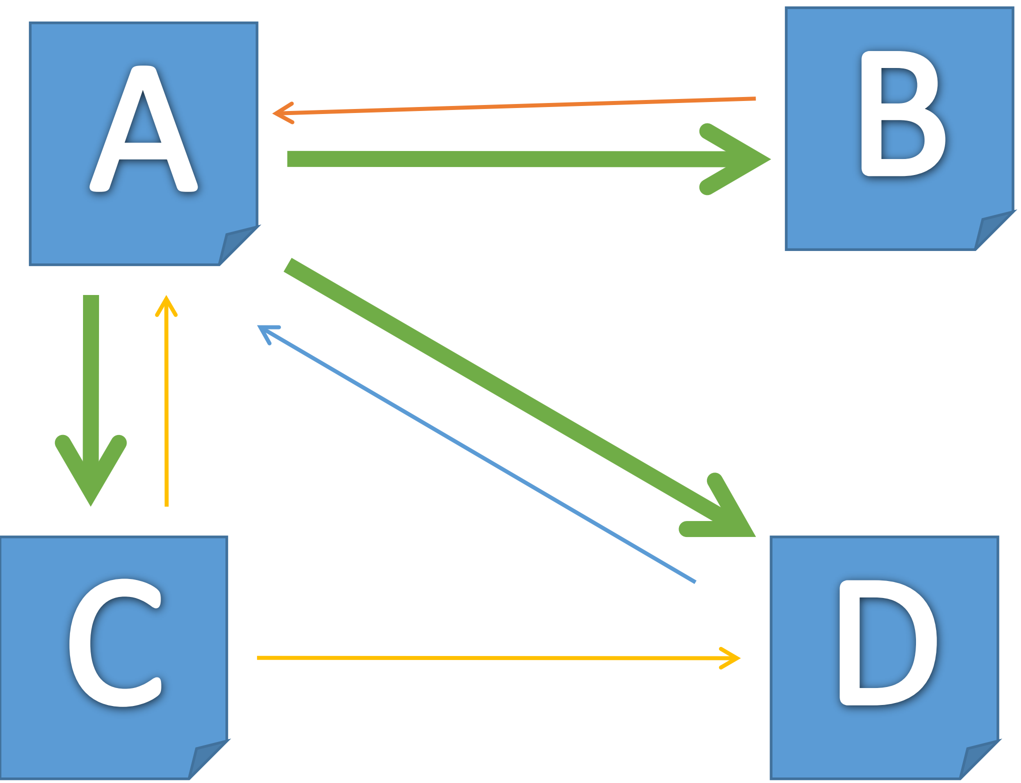
$$
\begin{array}{c}
\\
A \\ B \\ C \\ D
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



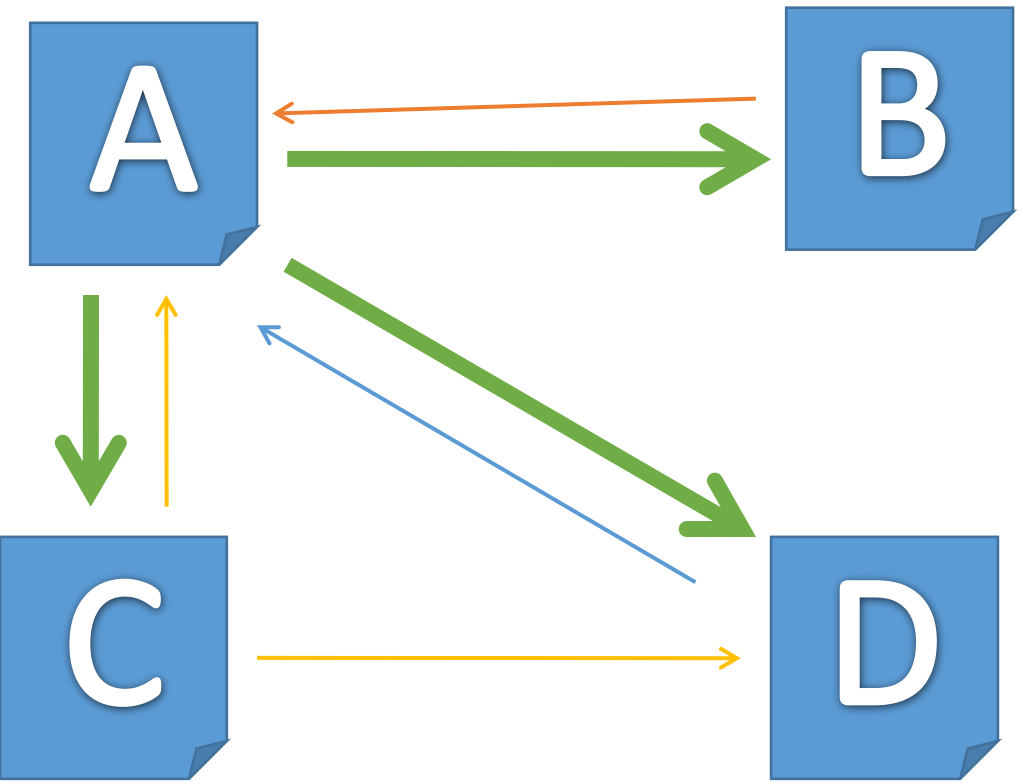
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

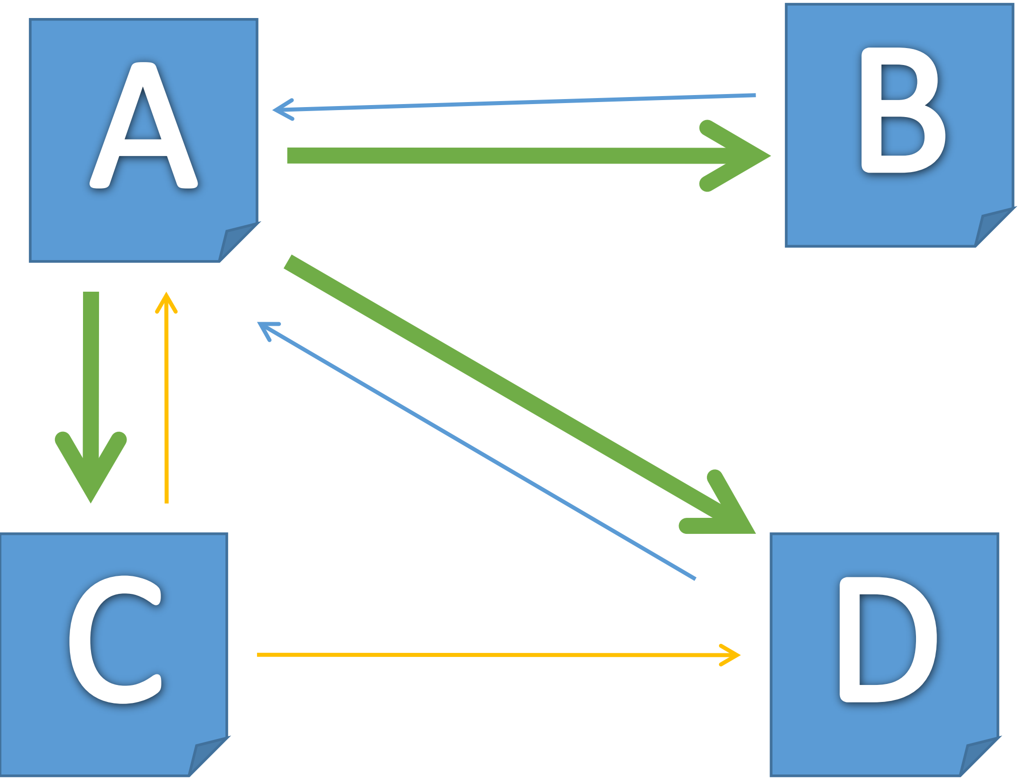


$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I(P_B)}{1} + \frac{I(P_C)}{2} + \frac{I(P_B)}{1} \\ \frac{I(P_A)}{3} \\ \frac{I(P_A)}{3} \\ \frac{I(P_A)}{3} + \frac{I(P_C)}{2} \end{pmatrix}$$



$$I(P_B) = \frac{I(P_A)}{3}$$

$$I(P_D) = \frac{I(P_A)}{3} + \frac{I(P_C)}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix}$$

Valores propios y vectores propios

Matriz

Valor propio

$$Ax = \lambda x$$

Vector propio

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix}$$

$$Ax = \lambda x$$

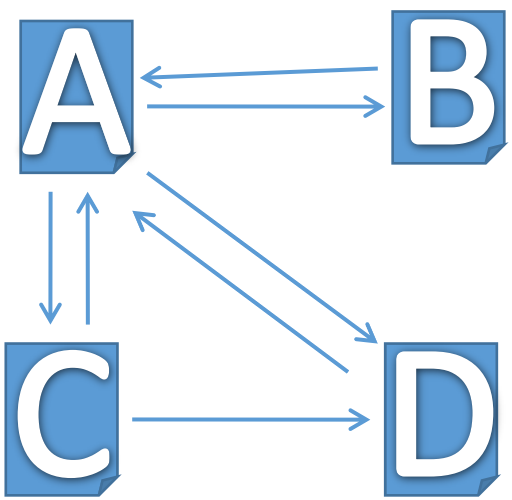
$$A\begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(P_A) \\ I(P_B) \\ I(P_C) \\ I(P_D) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$Ax = x$$

MATLAB

Vector de PageRank



$$\begin{pmatrix} 0.8242 \\ 0.2747 \\ 0.2747 \\ 0.4121 \end{pmatrix}$$

Página A

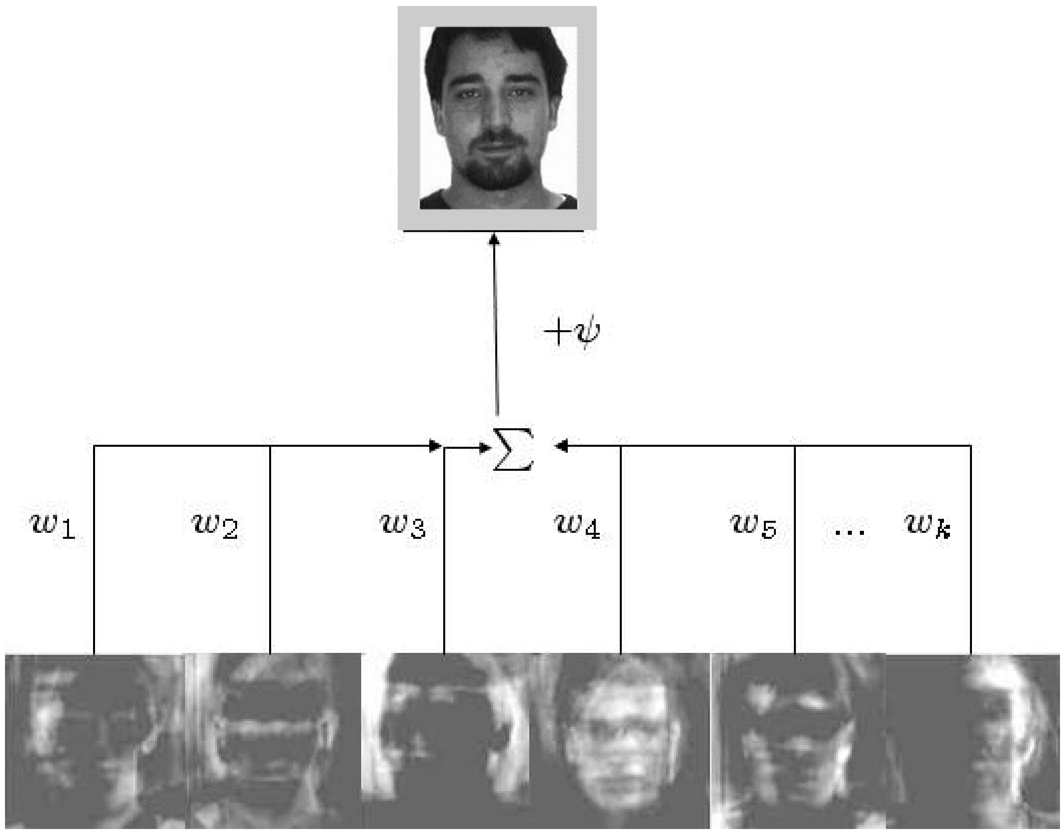
Página B

Página C

Página D

Bueno, bueno, pero ¿y qué hay de las fotos?

Eigenfaces

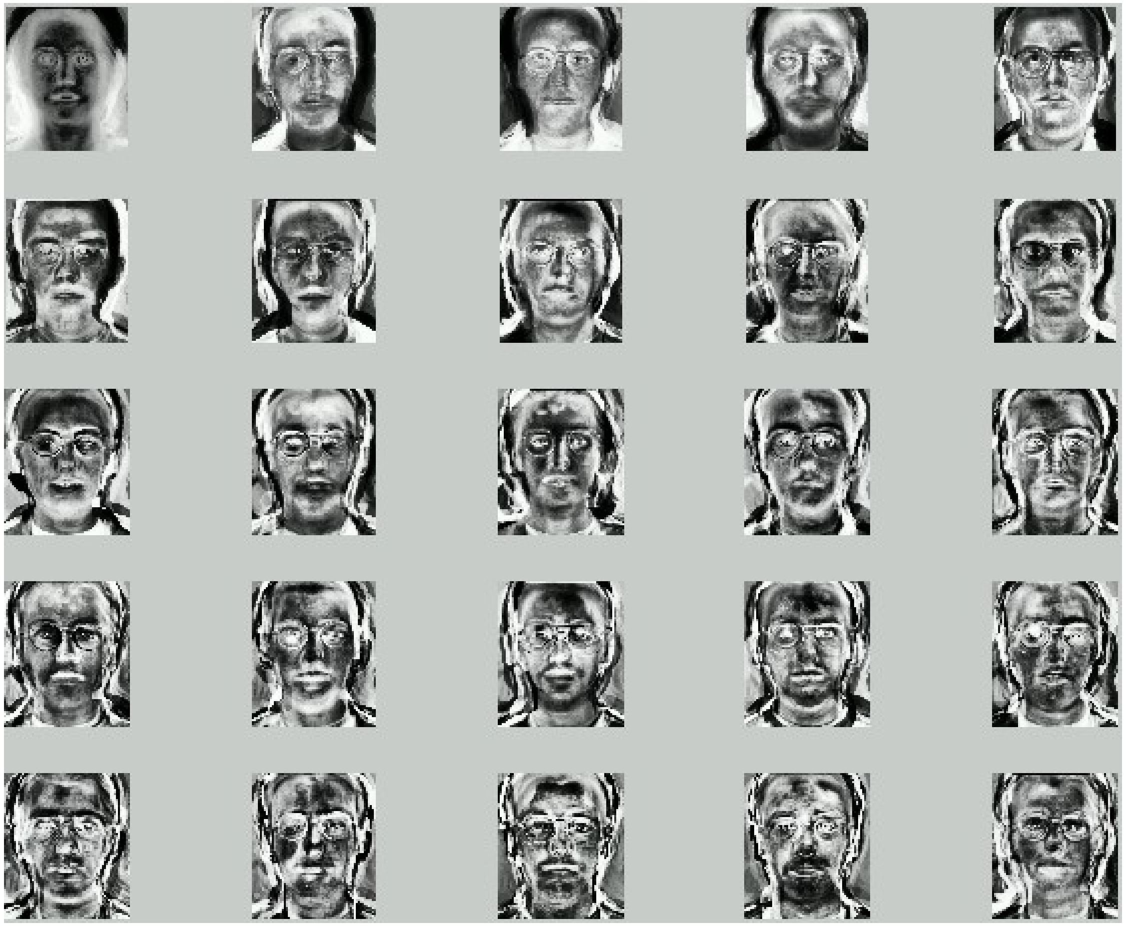
$+\psi$
Σ
w_1
w_2
w_3
w_4
w_5
$\ldots$
w_k

$$S = \{ \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots\ldots\ldots, \Gamma_M \}$$

$$\Psi = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{M} \Gamma_n$$

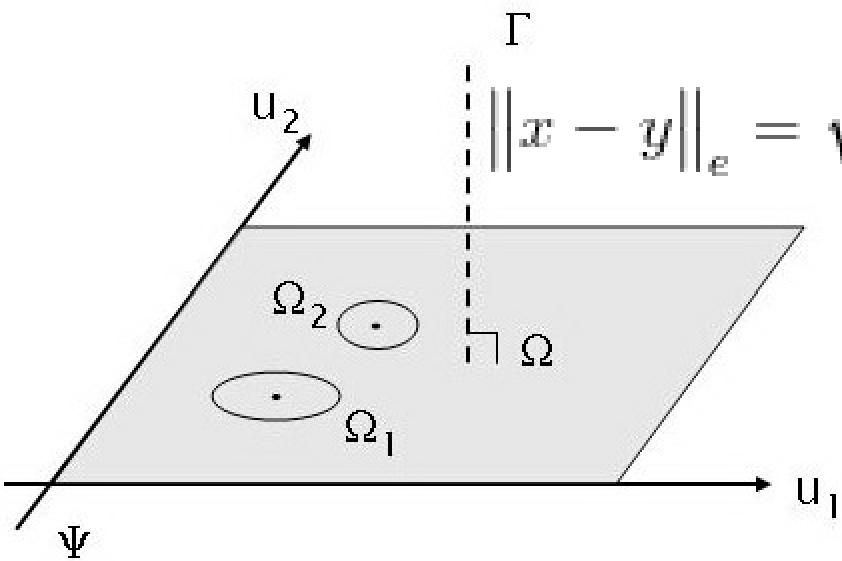
$$\Phi_i = \Gamma_i - \Psi$$

$$C = AA^T \quad A = [\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_M]$$



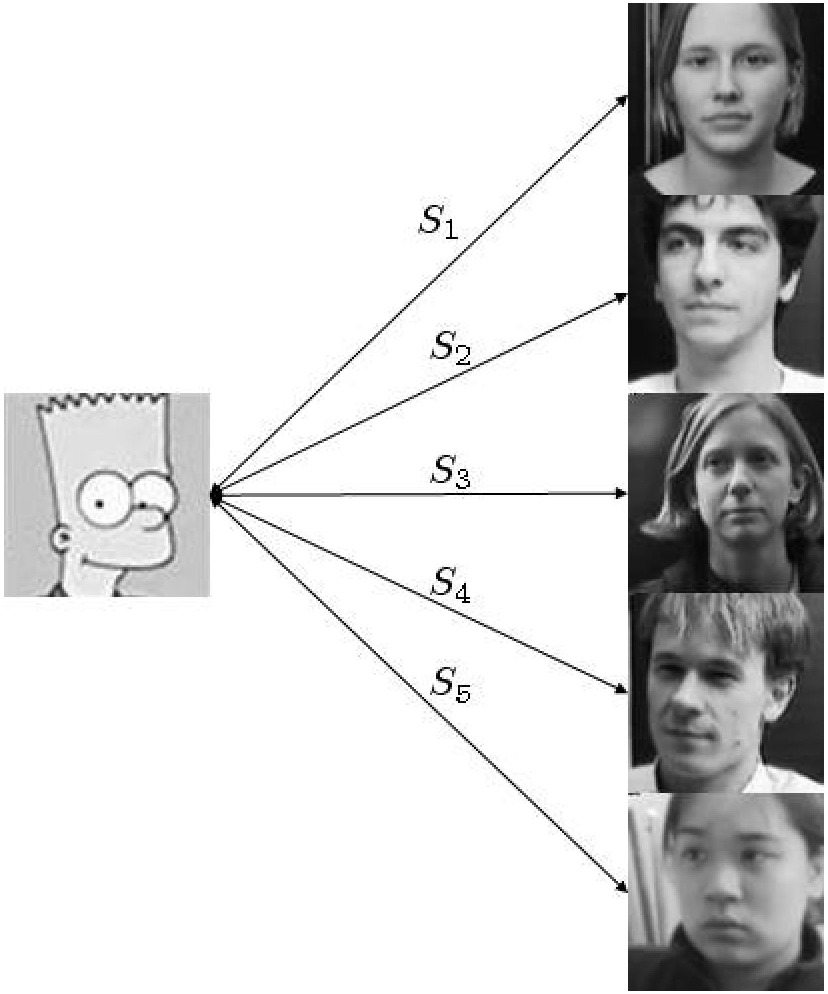
Sí, sí, pero yo quiero saber dónde está este señor…

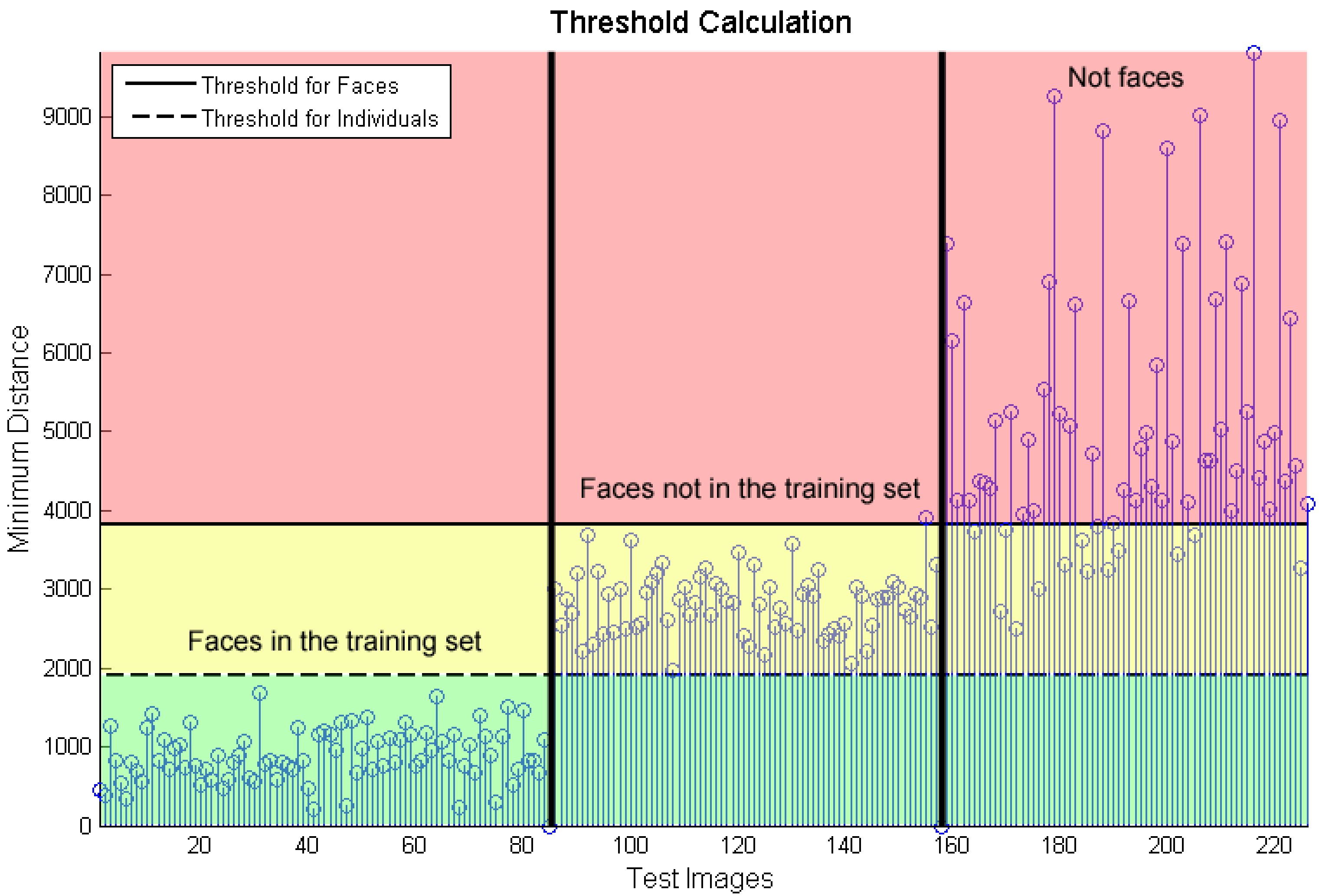
El espacio de caras



$$\|x - y\|_e = \sqrt{|x_i - y_i|^2}$$

Distancia


S_1
S_2
S_3
S_4
S_5



Threshold Calculation
Threshold for Faces
Threshold for Individuals
Not faces
Faces not in the training set
Faces in the training set
Minimum Distance
Test Images
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220

$$Ax = y$$

$$Ax = y$$

Si A es invertible,

$$x = A^{-1}\, y$$

Si A no es invertible,

Sea

$$A_{p\times q} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

De forma que A_{11} es una matriz de orden $r \times r$ y rango r

Tomemos

$$G_{q\times p} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inversa Moore-Penrose

- $AGA = A$
- $GAG = G$
- $(AG)^t = AG$
- $(GA)^t = GA$

Es única.

La solución general del sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

Está dado por

$$x = Gb + (I - GA)z$$

Donde z es arbitrario.

Gracias