Sobre descomponibilidad de funciones entre continuos

Hugo Villanueva

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas, UNACH

Seminario FCFM-UNACH
20 de abril de 2017

Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

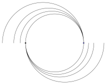
Ejemplos de continuos

Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos



Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

El arco

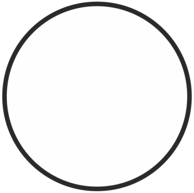
Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

La curva cerrada simple



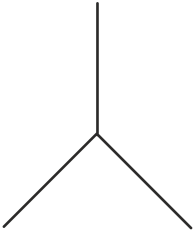
Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

El triodo

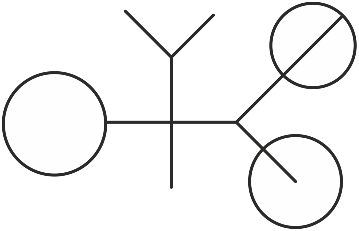


Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

Las gráficas finitas

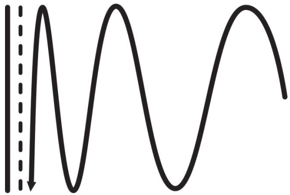


Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

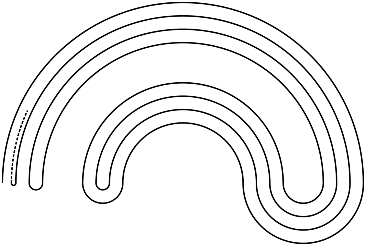
El continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$.



Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.



Ejemplos de continuos

El arcoiris de Knaster

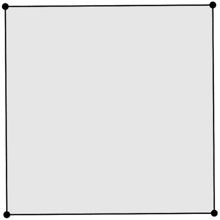
Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

La 2-celda $[0,1]^2$.



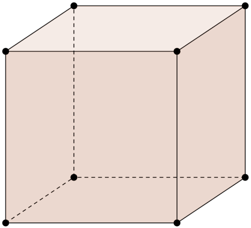
Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

La 3-celda $[0, 1]^3$.

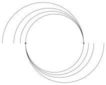


Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

La 4-celda.



Continuos

Definición

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Ejemplos de continuos

El cubo de Hilbert $\prod_0^\infty [0, 1]$.

Funciones monónotas

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.

Funciones monónotas

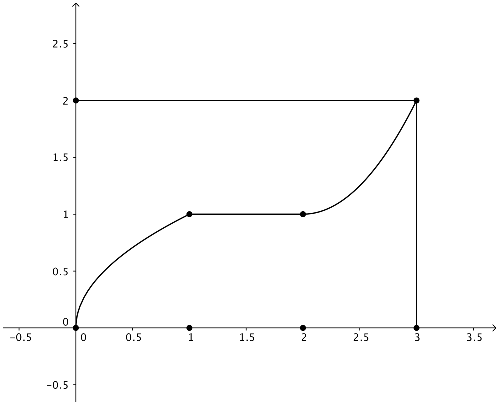
Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.

Funciones monónotas

Definición.

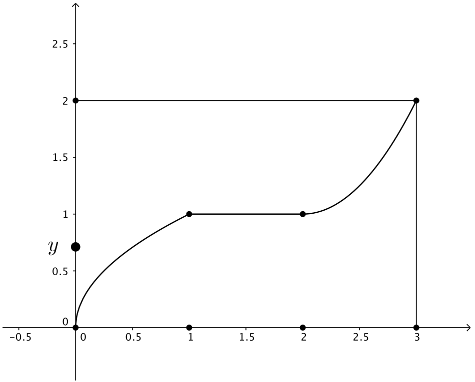
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones monónotas

Definición.

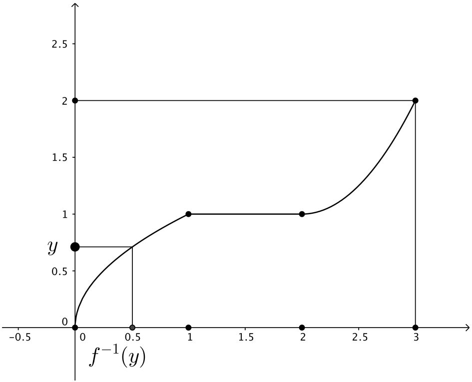
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones monónotas

Definición.

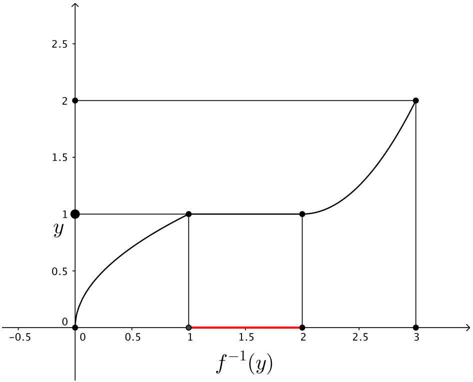
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones monónotas

Definición.

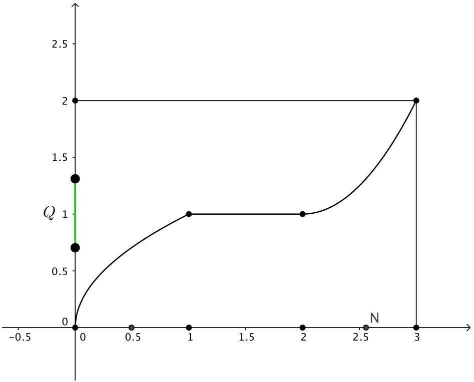
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones monónotas

Definición.

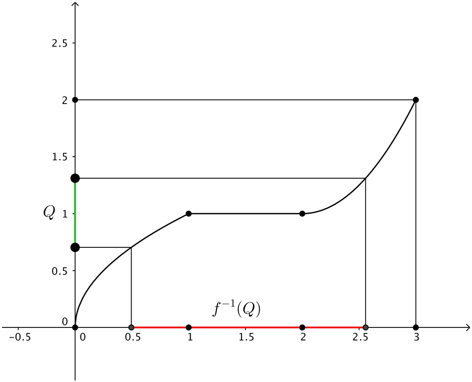
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones monónotas

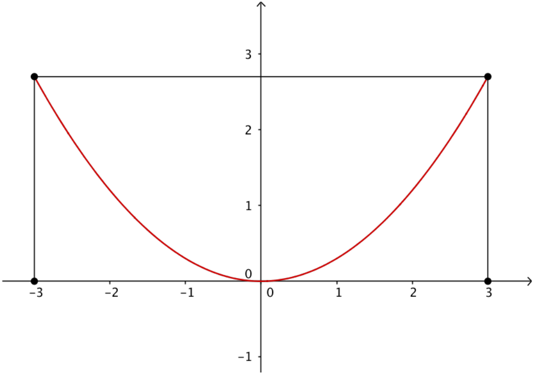
Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Definición.

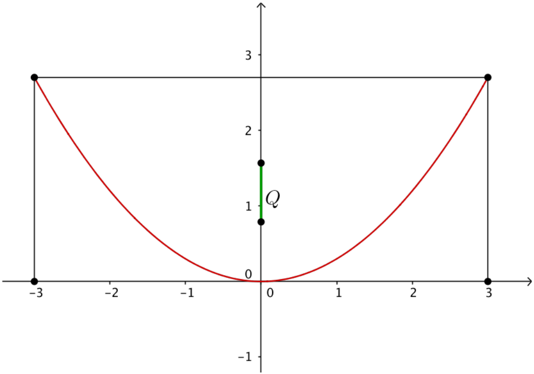
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones monónotas

Definición.

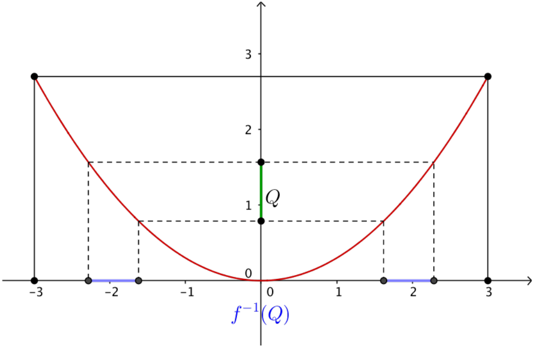
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones monónotas

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *monótona* si $f^{-1}(Q)$ is conexo para cada subcontinuo Q de Y.



Funciones casi monónotas

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *casi monótona* si $f^{-1}(Q)$ es conexo para cada subcontinuo con interior no vacío Q de Y.

Observación.

Una función monótona es casi monótona.

Existen funciones casi monótonas que no son monótonas.

Funciones casi monónotas

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *casi monótona* si $f^{-1}(Q)$ es conexo para cada subcontinuo con interior no vacío Q de Y.

Observación.

Una función monótona es casi monótona.

Existen funciones casi monótonas que no son monótonas.

Funciones casi monónotas

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *casi monótona* si $f^{-1}(Q)$ es conexo para cada subcontinuo con interior no vacío Q de Y.

Observación.

Una función monótona es casi monótona.

Existen funciones casi monótonas que no son monótonas.

Funciones casi monónotas

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *casi monótona* si $f^{-1}(Q)$ es conexo para cada subcontinuo con interior no vacío Q de Y.

Observación.

Una función monótona es casi monótona.

Existen funciones casi monótonas que no son monótonas.

Funciones fuertemente libremente descomponibles

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *fuertemente libremente descomponible* si siempre que C y D son subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$, entonces $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos.

Observación

Una función casi monótona es fuertemente libremente descomponible.

Funciones fuertemente libremente descomponibles

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *fuertemente libremente descomponible* si siempre que C y D son subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$, entonces $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos.

Observación

Una función casi monótona es fuertemente libremente descomponible.

Funciones fuertemente libremente descomponibles

Definición.

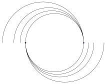
Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *fuertemente libremente descomponible* si siempre que C y D son subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$, entonces $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos.

Observación

Una función casi monótona es fuertemente libremente descomponible.

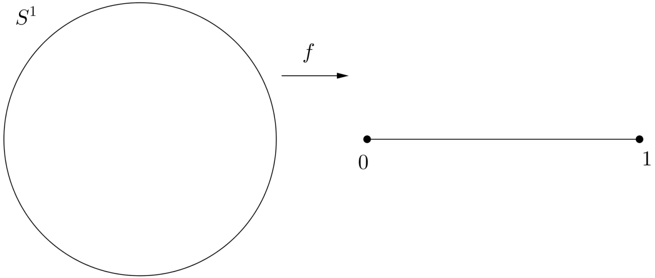
Funciones fuertemente libremente descomponibles

Existe funciones fuertemente libremente descomponibles que no son casi monótonas.



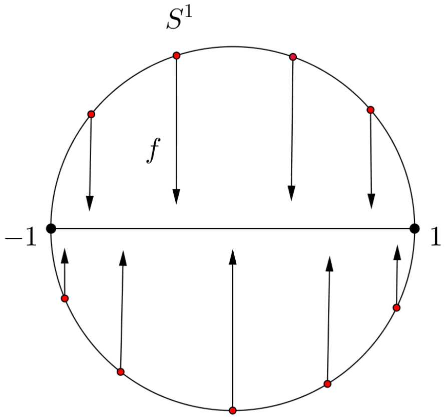
Funciones fuertemente libremente descomponibles

Existe funciones fuertemente libremente descomponibles que no son casi monótonas.



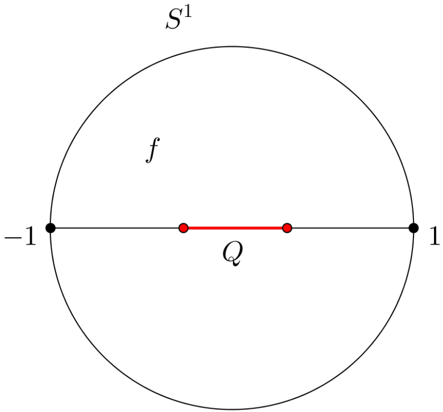
Funciones fuertemente libremente descomponibles

Existe funciones fuertemente libremente descomponibles que no son casi monótonas.



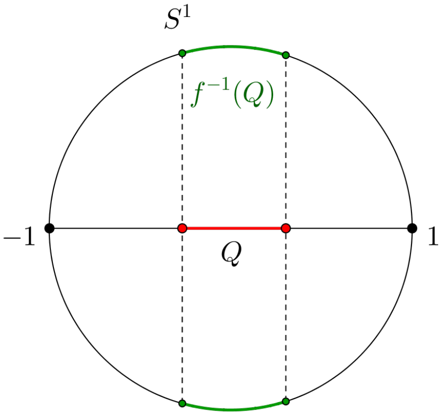
Funciones fuertemente libremente descomponibles

Existe funciones fuertemente libremente descomponibles que no son casi monótonas.

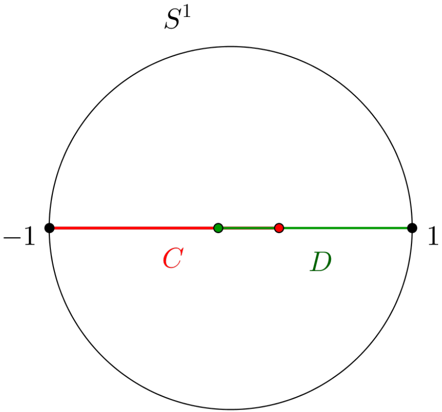


Funciones fuertemente libremente descomponibles

Existe funciones fuertemente libremente descomponibles que no son casi monótonas.

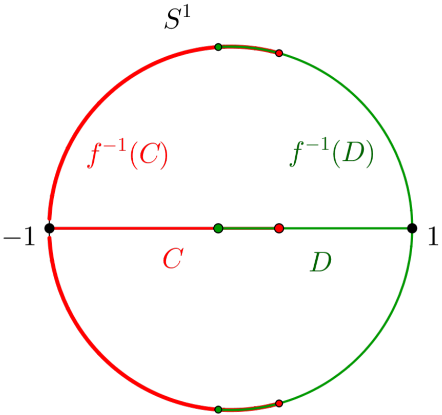


Existe funciones fuertemente libremente descomponibles que no son casi monótonas.



Funciones fuertemente libremente descomponibles

Existe funciones fuertemente libremente descomponibles que no son casi monótonas.



Funciones líbremente descomponibles

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *líbremente descomponible* si siempre que C y D son subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $A \subset f^{-1}(C)$ y $B \subset f^{-1}(D)$.

Observación

Una función fuertemente líbremente descomponible es líbremente descomponible.

Funciones líbremente descomponibles

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *líbremente descomponible* si siempre que C y D son subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $A \subset f^{-1}(C)$ y $B \subset f^{-1}(D)$.

Observación

Una función fuertemente líbremente descomponible es líbremente descomponible.

Funciones líbremente descomponibles

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobre entre continuos. Decimos que f es: *líbremente descomponible* si siempre que C y D son subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $A \subset f^{-1}(C)$ y $B \subset f^{-1}(D)$.

Observación

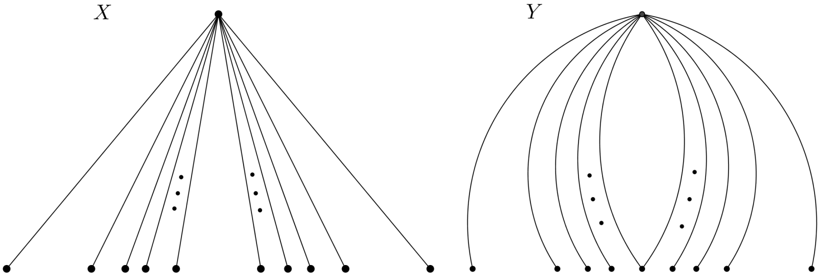
Una función fuertemente líbremente descomponible es líbremente descomponible.

Funciones líbremente descomponibles

Existen funciones líbremente descomponibles que no son fuertemente líbremente descomponibles.

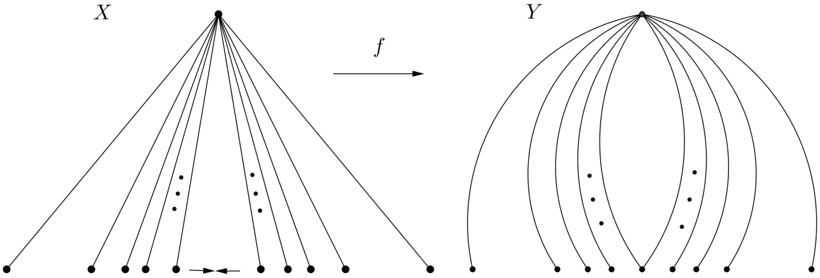
Funciones líbremente descomponibles

Existen funciones líbremente descomponibles que no son fuertemente líbremente descomponibles.



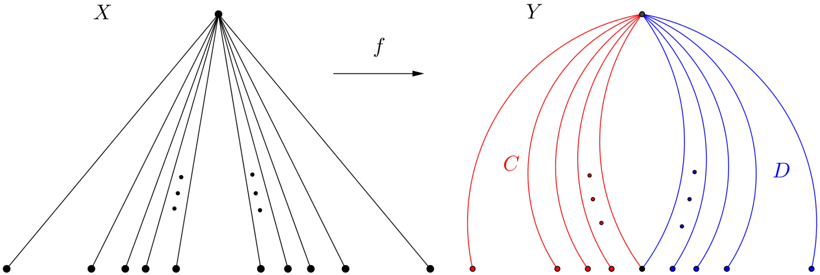
Funciones líbremente descomponibles

Existen funciones líbremente descomponibles que no son fuertemente líbremente descomponibles.



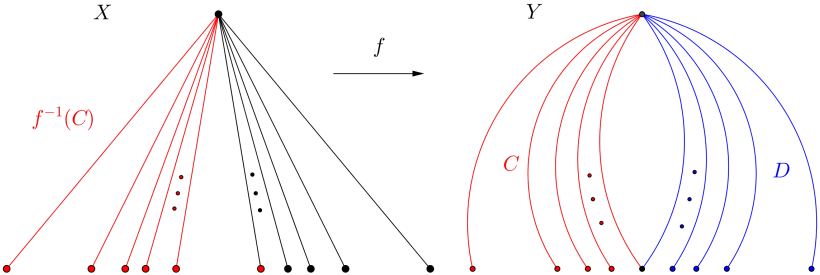
Funciones líbremente descomponibles

Existen funciones líbremente descomponibles que no son fuertemente líbremente descomponibles.



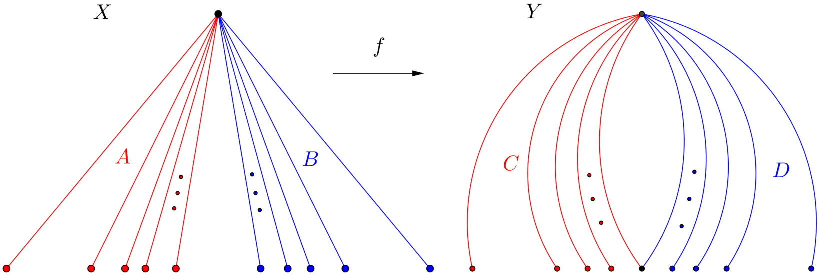
Funciones líbremente descomponibles

Existen funciones líbremente descomponibles que no son fuertemente líbremente descomponibles.



Funciones líbremente descomponibles

Existen funciones líbremente descomponibles que no son fuertemente líbremente descomponibles.



Implicaciones

Toda función monótona es casi monótona.

Toda función casi monótona es fuertemente libremente descomponible.

Toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible.

as conversas no son necesariamente ciertas.

Implicaciones

Toda función monótona es casi monótona.

Toda función casi monótona es fuertemente libremente descomponible.

Toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible.

as conversas no son necesariamente ciertas.

Implicaciones

Toda función monótona es casi monótona.

Toda función casi monótona es fuertemente libremente descomponible.

Toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible.

as conversas no son necesariamente ciertas.

Implicaciones

Toda función monótona es casi monótona.

Toda función casi monótona es fuertemente libremente descomponible.

Toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible.

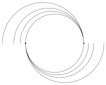
Las conversas no son necesariamente ciertas.

Unicoherencia

Definición

Un continuo X es unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo.

[01] es unicoherente.



Unicoherencia

Definición

Un continuo X es unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo.

$[0,1]$ es unicoherente.

Definición

Un continuo X es unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo.

[01] es unicoherente.

Unicoherencia

Definición

Un continuo X es unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo.

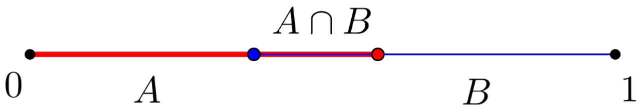
[01] es unicoherente.

Unicoherencia

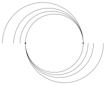
Definición

Un continuo X es unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo.

[01] es unicoherente.

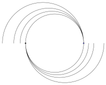


Unicoherencia



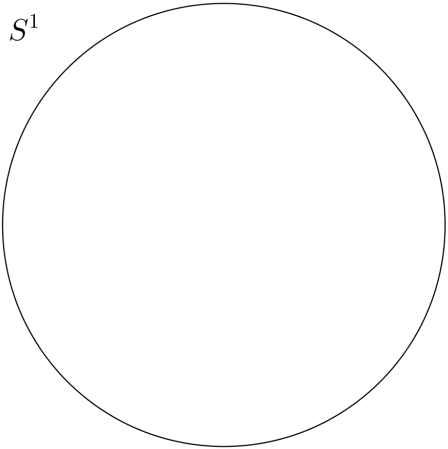
Unicoherencia

S^1 no es unicoherente.



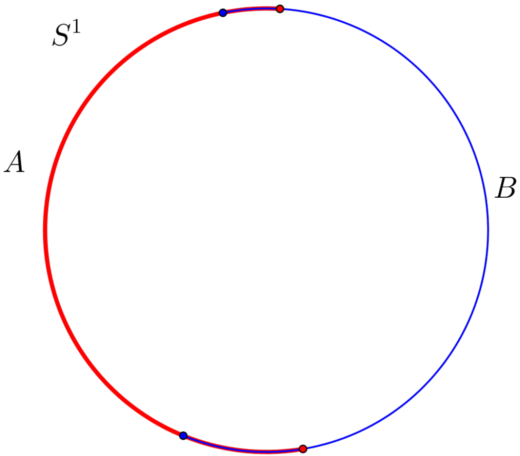
Unicoherencia

S^1 no es unicoherente.



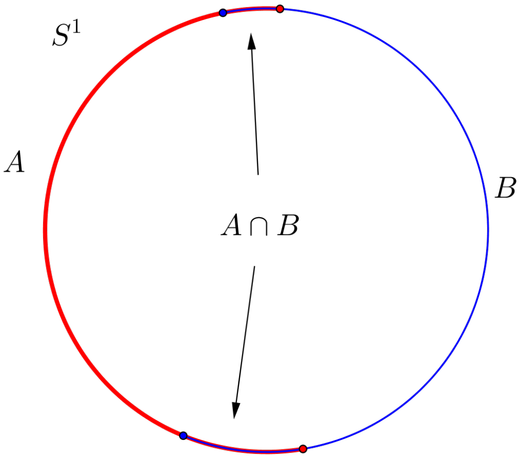
Unicoherencia

S^1 no es unicoherente.



Unicoherencia

S^1 no es unicoherente.



Resultados previos

Teorema. J. R. Gordh, Jr, C. B. Hughes (1979)

Si X es unicoherente y $f : X \to Y$ es libremente fuertemente descomponible, entonces Y es unicoherente.

Teorema. J. Camargo, S. Macías (2012)

Sea $f : X \to Y$ fuertemente libremente descomponible. Si X es unicoherente entonces f es casi monótona.

Resultados previos

Teorema. J. R. Gordh, Jr, C. B. Hughes (1979)

Si X es unicoherente y $f : X \to Y$ es libremente fuertemente descomponible, entonces Y es unicoherente.

Teorema. J. Camargo, S. Macías (2012)

Sea $f : X \to Y$ fuertemente libremente descomponible. Si X es unicoherente entonces f es casi monótona.

Definición

Decimos que un continuo X es casi unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X tales que $int_X(A \cap B) \neq \emptyset$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Todo continuo unicoherente es casi unicoherente.

No todo continuo casi unicoherente es unicoherente.

Unicoherencia débil

Definición

Decimos que un continuo X es casi unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X tales que $int_X(A \cap B) \neq \emptyset$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Todo continuo unicoherente es casi unicoherente.

No todo continuo casi unicoherente es unicoherente.

Unicoherencia débil

Definición

Decimos que un continuo X es casi unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X tales que $int_X(A \cap B) \neq \emptyset$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Todo continuo unicoherente es casi unicoherente.

No todo continuo casi unicoherente es unicoherente.

Definición

Un continuo X es irreducible si existen $a, b \in X$ tales que, si Z es un subcontinuo de X tal que $a, b \in Z$, entonces $Z = X$.

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Todo continuo irreducible es casi unicoherente.

Resutados

Definición

Un continuo X es irreducible si existen $a, b \in X$ tales que, si Z es un subcontinuo de X tal que $a, b \in Z$, entonces $Z = X$.

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Todo continuo irreducible es casi unicoherente.

¿Cuándo un continuo casi unicoherente es unicoherente?

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si Xes un continuo casi unicoherente y localmente conexo, entonces X es unicoherente.

Pregunta. (J. Camargo, H. Villanueva)

¿Si un continuo es arco conexo y casi unicoherente, entonces es unicoherente?

Resultados

¿Cuándo un continuo casi unicoherente es unicoherente?

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si Xes un continuo casi unicoherente y localmente conexo, entonces X es unicoherente.

Pregunta. (J. Camargo, H. Villanueva)

¿Si un continuo es arco conexo y casi unicoherente, entonces es unicoherente?

Resultados

¿Cuándo un continuo casi unicoherente es unicoherente?

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si Xes un continuo casi unicoherente y localmente conexo, entonces X es unicoherente.

Pregunta. (J. Camargo, H. Villanueva)

¿Si un continuo es arco conexo y casi unicoherente, entonces es unicoherente?

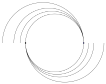
Pregunta

Definición

Un continuo X es aposindético si para cualesquiera dos puntos distintos $p, q \in X$ existe un subcontinuo W de X tal que $p \in int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$.

Pregunta

Si X es un continuo aposindético y casi unicoherente, ¿es cierto que X es unicoherente?



Pregunta

Definición

Un continuo X es aposindético si para cualesquiera dos puntos distintos $p, q \in X$ existe un subcontinuo W de X tal que $p \in int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$.

Pregunta

Si X es un continuo aposindético y casi unicoherente, ¿es cierto que X es unicoherente?

Definición

Un continuo X es aposindético si para cualesquiera dos puntos distintos $p, q \in X$ existe un subcontinuo W de X tal que $p \in int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$.

Pregunta

Si X es un continuo aposindético y casi unicoherente, ¿es cierto que X es unicoherente?

Resultados

Teorema (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es casi monótona y X es casi unicoherente, entonces Y es casi unicoherente.

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es fuertemente libremente descomponible y X es casi unicoherente, entonces Y es casi unicoherente.

Resultados

Teorema (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es casi monótona y X es casi unicoherente, entonces Y es casi unicoherente.

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es fuertemente libremente descomponible y X es casi unicoherente, entonces Y es casi unicoherente.

Resultados

Teorema (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es casi monótona y X es casi unicoherente, entonces Y es casi unicoherente.

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es fuertemente libremente descomponible y X es casi unicoherente, entonces Y es casi unicoherente.

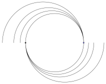
Resultados

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Sea $f : X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es casi unicoherente, entonces f es casi monótona.

Corolario. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es fuertemente libremente descomponible y X es irreducible, entonces f es casi monótona.



Resultados

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Sea $f : X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es casi unicoherente, entonces f es casi monótona.

Corolario. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es fuertemente libremente descomponible y X es irreducible, entonces f es casi monótona.

Resultados

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Sea $f : X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es casi unicoherente, entonces f es casi monótona.

Corolario. (J. Camargo, H. Villanueva)

Si $f : X \to Y$ es fuertemente libremente descomponible y X es irreducible, entonces f es casi monótona.

Resultados

Ejemplo. (J. Camargo, H. Villanueva)

Existe un continuo X que no es casi unicoherente con la propiedad de que cada función fuertemente libremente descomponible, $f : X \to Y$, es casi monótona, para cada continuo Y.

Resultados

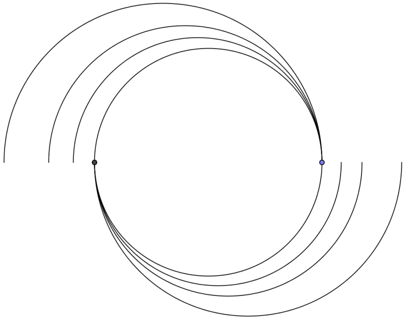
Ejemplo. (J. Camargo, H. Villanueva)

Existe un continuo X que no es casi unicoherente con la propiedad de que cada función fuertemente libremente descomponible, $f : X \to Y$, es casi monótona, para cada continuo Y.

Resultados

Ejemplo. (J. Camargo, H. Villanueva)

Existe un continuo X que no es casi unicoherente con la propiedad de que cada función fuertemente libremente descomponible, $f : X \to Y$, es casi monótona, para cada continuo Y.



Resultados

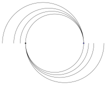
Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Sea $f : X \to Y$ libremente descomponible. Si X es casi unicoherente y Y es localmente conexo, entonces f es monótona.

Resultados

Teorema. (J. Camargo, H. Villanueva)

Sea $f : X \to Y$ libremente descomponible. Si X es casi unicoherente y Y es localmente conexo, entonces f es monótona.



¡GRACIAS!