# Análisis de la estructura de norma de una teoría con dimensiones extra compactas

Alicia López

Cinvestav

MCTP
Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

1. Campos de norma
   - Lagrangiana de Yang-Mills
   - Hamiltonización y análisis de constricciones
   - Simetrías
2. Espacio tiempo con dimensiones extra
   - Espacio tiempo cuadridimensional
   - Espacio tiempo con una y dos dimensiones extra compactas
3. Teorías de Yang-Mills en dimensiones extra
   - Lagrangiana y sus simetrías
   - Hamiltonización y análisis de constricciones v.1
   - Compactificación
   - Hamiltonización y análisis de constricciones v.2
   - Transformación canónica y simetrías

En una teoría de campos el sistema es descrito en términos de funciones $\varphi(x)$ del espacio tiempo $x = (x^0, \vec{x})$

La acción se define en terminos de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$$

En una teoría de norma, la solución general contiene funciones arbitrarias del espacio tiempo, entonces las variables canónicas no son todas independientes i.e. existen constricciones.

Las teorías de norma son invariantes bajo

Transformaciones abelianas $\longrightarrow$ Grupos de transformaciones que conmutan

$$[T^a, T^b] = 0$$

Transformaciones no abelianas $\longrightarrow$ Grupos de transformaciones que no conmutan

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

Campos de norma $\quad A_\mu = A_\mu^a \, T^a$

funciones del espacio tiempo

generadores de las transformaciones

Las teorías de norma son invariantes bajo

Transformaciones abelianas $\longrightarrow$ Grupos de transformaciones que conmutan

$$[T^a, T^b] = 0$$

Transformaciones no abelianas $\longrightarrow$ Grupos de transformaciones que no conmutan

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

Campos de norma $\quad A_\mu = A_\mu^a T^a$

generadores de las transformaciones

funciones del espacio tiempo

Cinvestav

MCTP Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

Las teorías de norma son invariantes bajo

Transformaciones abelianas $\longrightarrow$ Grupos de transformaciones que conmutan

$$[T^a, T^b] = 0$$

Transformaciones no abelianas $\longrightarrow$ Grupos de transformaciones que no conmutan

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

Campos de norma $\quad A_\mu = A_\mu^a T^a$

funciones del espacio tiempo

generadores de las transformaciones

# Interacciones fundamentales del modelo estándar de partículas elementales

Electromagnética

$B$

Débil

$W^+, W^-, Z$

Fuerte

$G^a$

Sea $A_\mu^a(x)$ un campo de norma, la Lagrangiana de Yang-Mills es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x)$$

dónde

$x$ son las coordenadas de $M^4$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$a = 1, \dots, r$

$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

Sea $A_\mu^a(x)$ un campo de norma, la Lagrangiana de Yang-Mills es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x)$$

dónde

$x$ son las coordenadas de $M^4$ $\leftarrow$ espacio de Minkowski

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$a = 1, \dots, r$

$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

Sea $A_\mu^a(x)$ un campo de norma, la Lagrangiana de Yang-Mills es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x)$$

dónde

$x$ son las coordenadas de $M^4$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

dimensión del grupo de norma

índice de norma $\longrightarrow$ $a = 1, \dots, r$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Sea $A^a_\mu(x)$ un campo de norma, la Lagrangiana de Yang-Mills es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu a}(x)$$

dónde

$x$ son las coordenadas de $M^4$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$a = 1, \dots, r$

Constantes de estructura

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Curvatura

Constante de acoplamiento

La acción es $S = \int d^4x \, \mathcal{L}$

y es invariante bajo la transformación de norma infinitesimal

$$\delta A^a_\mu = D^{ab}_\mu \alpha^b(x)$$

parámetros de norma

dónde

$$D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g f^{abc} A^c_\mu$$

derivada covariante

## Hamiltonización

Transf. de Legendre $\quad \pi^{\mu}_{a} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{a}_{\mu}} = F^{\mu 0}_{a}$

Notese que $\pi^{0}_{a} = 0 \Rightarrow \phi^{(1)}_{a} \equiv \pi^{0}_{a} \approx 0$ ⟵ constricción primaria

Densidad hamiltoniana canonica $\quad \mathcal{H}^{c} = \dot{A}^{a}_{i}\,\pi^{i}_{a} - \mathcal{L}$

Densidad hamiltoniana primaria $\quad \mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{c} + \epsilon^{a}(x)\,\phi^{(1)}_{a}$

$$\dot{\phi}^{(1)}_{a} = \{\phi^{(1)}_{a}, \mathcal{H}^{(1)}\} = \phi^{(2)}_{a}$$

$$\phi^{(2)}_{a} \equiv D^{ab}_{i}\,\pi^{i}_{b} \approx 0$$ ⟵ constricción secundaria

$$\dot{\phi}^{(2)}_{a} = \{\phi^{(2)}_{a}\ \mathcal{H}^{(1)}\} \approx 0$$

Las constricciones secundarias satisfacen:

$$\{\phi_a^{(2)}, \phi_b^{(2)}\} = g\, f_{abc}\, \phi_c^{(2)}$$

El generador de las transformaciones es

$$G = (D_0^{ab}\alpha^b)\,\phi_a^{(1)} - \alpha^a \phi_a^{(2)}$$

en el sentido de

$$\delta A_\mu^a = \{A_\mu^a, G\} = D_\mu^{ab}\,\alpha^b$$

# El espacio tiempo

## En 4 dimensiones

Los campos se definen en el espacio de Minkowsky, cuyas coordenadas están denotadas por

$$(\underbrace{x^0}_{\text{temporal}}, \underbrace{x^1, x^2, x^3}_{\text{espaciales}}) \equiv (x^\mu)$$

Este espacio se denota por $M^4$

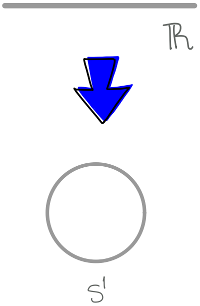
## 4+1 dimensiones

Agregamos una coordenada espacial

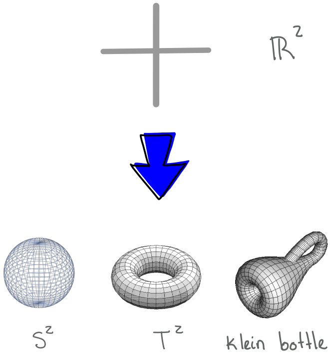
$$(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5) \equiv (x^M) \equiv (x^\mu, y)$$

Pero $x^5$ no puede ser exactamente como $x^1, \dots, x^3$, debe ser compacta.

## 1 dimensión extra




## 2 dimensiones extra



# La teoría fundamental

Densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{SU(N,M^{4})} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{MN}^{a}(x,y)\, \mathcal{F}^{MN}_{a}(x,y)$$

$(x,y)$ son las coordenadas en $M^{4} = M^{4} \times \frac{S^{1}}{Z_2}$ ; $M,N = 0,1,..,5$ $a = 1,\ldots,r$

$$\mathcal{F}_{MN}^{a} = \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a + g_m f^{abc} A_M^b A_N^c \quad \leftarrow \text{curvatura}$$

La lagrangiana es invariante bajo

$$\delta A_M^a(x,y) = D_M^{ab}\, \alpha^{b}(x,y)$$

donde $D_M^{ab} = \delta^{ab}\partial_M - g_m f^{abc} A_M^c$ $\longleftarrow$ derivada covariante

$$g_m \propto g$$

Hamiltonización

Los momentos estan dados por

$$\pi^{\mu}_{a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{a}_{\mu}} = F^{\mu 0}_{a}$$

Y tenemos las constricciones

$$\phi^{(1)}_{a} \equiv \pi^{0}_{a}(x,y) \approx 0 \longleftarrow \text{primarias}$$

$$\phi^{(2)}_{a} \equiv D^{ab}_{I}\, \pi^{I}_{b}(x,y) \approx 0 \longleftarrow \text{secundarias}$$

las cuales son de 1ª clase y satisfacen los paréntesis de Poisson:

$$\{ \phi^{(2)}_{a}, \phi^{(2)}_{b} \}_{SU(\underline{N}, M^{4})} = g_{m} f_{abc}\, \phi^{(2)}_{c}$$

y el generador $G = (D^{ab}_{0} \alpha^{b})\, \phi^{(1)}_{a} - \alpha^{a} \phi^{(2)}_{a}$ nos da las simetrías usando

$$\delta A^{a}_{\mu} = \{ A^{a}_{\mu}, G \}_{SU(\underline{N}, M^{4})}$$

Dónde $\{ \, , \, \}_{SU(\underline{N}, M^{4})}$ son los paréntesis de Poisson con respecto a $( A^{a}_{\mu}, \pi^{\mu}_{a} )$.

Cinvestav MCTP Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

# La teoría efectiva

Suponemos

$S^1$ de radio $R$,

$A^a_\mu(x,y)$, $\alpha^a(x,y)$, $F^a_{\mu\nu}(x,y)$ periodicas en $y$

Ademas suponemos que

$A^a_\mu(x,y)$, $\alpha^a(x,y)$, $F^a_{\mu\nu}(x,y)$ $\longleftarrow$ son pares

$A^a_5(x,y)$, $F^a_{\mu 5}(x,y)$ $\longleftarrow$ son impares

De tal forma que, por ejemplo, para $A^a_\mu$

$$A^a_\mu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{R}} A^{(0)a}_\mu(x) + \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)a}_\mu(x) \cos\left(\frac{2\pi n y}{R}\right)$$

$$A^a_5(x,y) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)a}_5(x) \sin\left(\frac{2\pi n y}{R}\right)$$

La teoría efectiva es descrita por

$$\mathcal{L}_{SU(N,M^4)} = \int_0^R dy\, \mathcal{L}_{SU(N,M^n)}$$

donde los campos fundamentales son ahora

$$A_\mu^{(0)a}(x),\quad A_\mu^{(m)a}(x),\quad A_5^{(m)a}(x)$$

y las transformaciones que dejan invariante a $\mathcal{L}_{SU(N,M^4)}$ son

$$\delta A_\mu^{(0)a} = D_\mu^{(0)ab}\alpha^{(0)b} + g f_{abc} A_\mu^{(m)b}\alpha^{(m)c}$$

$$\delta A_\mu^{(m)a} = g f_{abc} A_\mu^{(m)b}\alpha^{(0)c} + D_\mu^{(mn)ab}\alpha^{(n)b}$$

$$\delta A_5^{(m)a} = g f_{abc} A_5^{(m)b}\alpha^{(0)c} + D_5^{(mn)ab}\alpha^{(n)b}$$

$$\delta_s A_\mu^{(0)a} = D_\mu^{(0)ab}\,\alpha^{(0)b} + g f_{abc}\, A_\mu^{(m)b}\,\alpha^{(m)c}$$

$$\delta_s A_\mu^{(m)a} = g f_{abc}\, A_\mu^{(m)b}\,\alpha^{(0)c} + D_\mu^{(mn)ab}\,\alpha^{(n)b}$$

$$\delta_s A_5^{(m)a} = g f_{abc}\, A_5^{(m)b}\,\alpha^{(0)c} + D_5^{(mn)ab}\,\alpha^{(n)b}$$

standard gauge transformations

$$\delta_{ns} A_\mu^{(0)a} = D_\mu^{(0)ab}\,\alpha^{(0)b} + g f_{abc}\, A_\mu^{(m)b}\,\alpha^{(m)c}$$

$$\delta_{ns} A_\mu^{(m)a} = g f_{abc}\, A_\mu^{(m)b}\,\alpha^{(0)c} + D_\mu^{(mn)ab}\,\alpha^{(n)b}$$

$$\delta_{ns} A_5^{(m)a} = g f_{abc}\, A_5^{(m)b}\,\alpha^{(0)c} + D_5^{(mn)ab}\,\alpha^{(n)b}$$

non-standard gauge transformations

Cinvestav

MCTP Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

# Hamiltonización

Los momentos estan dados por

$$\pi_a^{(0)\mu} = \mathcal{F}_a^{(0)\mu 0}, \qquad \pi_a^{(m)\mu} = \mathcal{F}_a^{(m)\mu 0}, \qquad \pi_a^{(m)5} = \mathcal{F}_a^{(m)50}$$

Que son los modos de Fourier de $\pi_a^{\mu}(x,y)$ (par) y de $\pi_a^{5}(x,y)$ (impar).

Y tenemos las constricciones

$$\left.\begin{aligned} \phi_a^{(1)(0)} &\equiv \pi_a^{(0)0}(x) \approx 0 \\ \phi_a^{(1)(m)} &\equiv \pi_a^{(m)0}(x) \approx 0 \end{aligned}\right\} \text{primarias}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_a^{(2)(0)} &\equiv D_i^{(0)ab}\pi_b^{(0)i} - g f_{abc}\left(A_i^{(m)c}\pi_b^{(m)i} + A_5^{(m)c}\pi_b^{(m)5}\right) \approx 0 \\ \phi_a^{(2)(m)} &\equiv D_i^{(mn)ab}\pi_b^{(n)i} - D_5^{(mn)ab}\pi_b^{(n)5} - g f_{abc} A_i^{(m)c}\pi_b^{(0)i} \approx 0 \end{aligned}\right\} \text{Secundarias}$$

¿ Son todas las constricciones ?

# Transformaciones canónicas

Sean $(q^i, p_i)$ pares canónicos, es decir

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{q^i, p_j\} = \delta^i{}_j$$

Consideremos la transformación

$$(q^i, p_i) \longmapsto (Q^a(q,p),\ P_a(q,p))$$

Esta transformación es canónica si

$$\{Q^a, Q^b\} = \{P_a, P_b\} = 0, \quad \{Q^a, P_b\} = \delta^a_b$$

Ya que sabemos que

$$\{A^a_\mu(\vec{x},y), \pi^N_b(\vec{x}',y')\}_{SU(N),M^4} = \delta^a_b\, \delta^N_\mu\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(y-y')$$

$$\{A^a_\mu(\vec{x},y), A^b_N(\vec{x}',y')\}_{SU(N),M^4} = \{\pi^\mu_a(\vec{x},y), \pi^N_b(\vec{x}',y')\}_{SU(N),M^4} = 0$$

queremos probar que

$$\left(A^a_\mu(x,y), \pi^\mu_a(x,y)\right) \mapsto \left(A^{(0)a}_\mu, A^{(n)a}_\mu, A^{(n)a}_5, \pi^{(0)\mu}_a, \pi^{(n)\mu}_a, \pi^{(n)5}_a\right)$$

es una transformación canónica.

Para lo cual usaremos las inversas, por ejemplo,

$$A^{(0)a}_\mu(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{R}}\int dy\; A^a_\mu(\vec{x},y)$$

$$\pi^{(0)\mu}_a(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{R}}\int dy\; \pi^\mu_a(\vec{x},y)$$

Entonces

$$\{A^{(0)a}_{\mu}[U], \pi^{(0)\nu}_{b}[V]\}_{SU(\underline{N}, M^4)} = \int d^3x\, d^3x'\, u(\vec{x})\, v(\vec{x}')\, \{A^{(0)a}_{\mu}(\vec{x}), \pi^{(0)\nu}_{b}(\vec{x}')\}_{SU(\underline{N}, M^4)}$$

$$= \int d^3x\, d^3x'\, dy\, dy'\, u(\vec{x})\, v(\vec{x}')\, \frac{1}{R} \{A^{a}_{\mu}(\vec{x}, y), \pi^{\nu}_{b}(\vec{x}', y')\}_{SU(\underline{N}, M^4)}$$

$$= \int d^3x\, d^3x'\, dy\, dy'\, u(\vec{x})\, v(\vec{x}')\, \frac{1}{R}\, \delta^a_b\, \delta^\nu_\mu\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')\, \delta(y-y')$$

$$= \delta^a_b\, \delta^\nu_\mu \int d^3x\, u(\vec{x})\, v(\vec{x}) \equiv \delta^a_b\, \delta^\nu_\mu\, [uv]$$

Siguiendo este procedimiento, se demuestra que la transformación es canónica.

Si en una teoría singular general, existe una transformación canónica que conecta las hamiltonianas canónicas y las constricciones primarias, entonces ambas formulaciones deben contar con el mismo número de generación de constricciones.

En nuestro caso tenemos

$$\mathcal{H}_{SU(\underline{N}, M^4)} \longrightarrow \mathcal{H}_{SU(\underline{N}, M^4)}$$

$$\phi_a^{(1)} \longrightarrow \left(\phi_a^{(1)(0)}, \phi_a^{(1)(m)}\right)$$

$$\phi_a^{(2)} \longrightarrow \left(\phi_a^{(2)(0)}, \phi_a^{(2)(m)}\right)$$

primarias + secundarias $\Rightarrow$ primarias + secundarias

Así que en la teoría efectiva tenemos constricciones de 1ª clase y un generador

$$G = G_s + G_{ns}$$

Cinvestav

MCTP Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

donde $$G_s = G_s\left(\alpha^{(0)a}\right)$$
$$G_{ns} = G_{ns}\left(\alpha^{(m)a}\right)$$

que reproducen las transformaciones que dejan invariante $\mathcal{L}_{SU(N,M^4)}$ via

$$\delta_s A^{(0)a}_\mu = \{A^{(0)a}_\mu, G_s\} \qquad \delta_{ns} A^{(0)a}_\mu = \{A^{(0)a}_\mu, G_{ns}\}$$

$$\delta_s A^{(m)a}_\mu = \{A^{(m)a}_\mu, G_s\} \qquad \delta_{ns} A^{(m)a}_\mu = \{A^{(m)a}_\mu, G_{ns}\}$$

$$\delta_s A^{(m)a}_5 = \{A^{(m)a}_5, G_s\} \qquad \delta_{ns} A^{(m)a}_5 = \{A^{(m)a}_5, G_{ns}\}$$

# ¡Gracias!