Procesos de Renovación en Presencia de No Homocedasticidad de Varianza.

Alfredo Camacho Valle

Definición del Problema

Considere la realización del proceso estocstico $\{X_t\}_{T=t_0}$, y introduzcamos el término "siniestro" si dicha variable se ubica en algún instante $t > t_0$ por debajo de un valor α dado, es decir si:

$$X_{t_k} < \alpha.$$

Ahora suponga que estamos interesados en conocer el número de "siniestros" que ocurrirán en un intervalo de tiempo $[0, t]$, mismo que denotaremos como la variable aleatoria $N(t)$, donde

$$0 \leq N(t) < \infty$$

Definición del Problema

Bajo la teoría de clásica de probabilidad, $N(t) \rightarrow$ Poisson (λ), donde:

$P[N(t) = n] = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{k!}$

Además,

$E[N(t)] = \lambda$

$Var[N(t)] = \lambda$

con las siguientes supuestos:

1. Homogeneidad en el tiempo.
2. Tasa de riesgo constante $(h(t_i) = \lambda, 0 \leq t_i \leq t)$.
3. La realización de la variable aleatoria X_t se desarrolla en un contexto homocedástico.

Definición del Problema

Sin embargo, Qué tan factible es que estos tres supuestos se cumplan en problemas reales?

Analicemos los registros históricos de 1980 al 2016 del Dow Jones del NYSE y introduzcamos las siguientes variables aleatorias:

X_k: Rendimiento ajustado del IPC al cierre de operaciones del día k.

$\alpha = -0.02$

$N(T)$: Número de veces que el rendimiento ajustado al final del día se ubique por debajo de 0.02, etre 0 y t.

Donde claramente:

$0 \leq N(T) \leq t$

Definición del Problema

Consideremos el gráfico de ocurrencia del fenómenos.

La distribución difiere mucho de una exponencial, mismo que pudo ser validado a través de una prueba de bondad de ajuste.

Procesos de Renovación

Si relajamos el supuesto de distribución Poisson, tenemos un Proceso de Renovación, del cual existe una amplia bibliografía; donde se establece que la función de probabilidad de $N(t)$, está dado por el producto de convoluciones (Renewal Equation).

Procesos de Renovación

Introduzcamos la siguiente Probabilidad:

$P(N_t) > n - 1 = F^n(t),\ n = 1, 2, ...$

Con las siguientes características:

$F(0) < 1$

$f(\infty) = 1.$

Donde $F^{(n)}$ resulta de la de la n-ésima convolucion de F.

Note que en el caso particular de la posion f se distribuye $\exp(\lambda)$.

Procesos de Renovación

Introduzcamos ahora, el valor esperado de eventos en un cierto intervalo de tiempo t, denotado por $H(t)$.

Misma cuya función est dada por:

$H(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dH(x)$

la ecuación anterior es conocida como "ecuacion de renovación".

En el caso de la distribución Poisson se puede demostrar que $H(t) = \lambda * t$

Procesos de Renovación

Con excepción de la Poisson, en el resto de funciones de distribuciones continuas, la solución de la probabilidad está dada por una ecuación diferencial, misma que se obtiene de la función inversa de la transformada de Laplace, por lo que la solución es a través de técnicas de métodos numéricos o simulación Montecarlo.

Cuando la variable aleatoria en estudio es discreta, la solución a la ecuación de renovación es a través de métodos recursivos.

Una buena alternativa resulta a través del Teorema de Límite Central para Procesos de Renovación.

Procesos de Renovación

Sin embargo, la solución vía procesos de renovación, no es robusta a los supuestos de homogeneidad de tiempo y varianza.

En el modelo propuesto, relajaremos el supuesto de varianza contante y nos basaremos en el siguiente supuesto:

La varianza es un proceso estocstico agrupable en $n < \infty$ grupos.

Volatilidad Estocástica

la serie de tiempo del IPC de la BMV se caracteriza por la volatilidad, misma que no es una variable observable a través del tiempo, y es estimada a través de la desviación estándar, la cual, de acuerdo a la teoría de caminatas aleatorias puede expresarse:

$$\sigma_t = \eta_t + e_t$$

$$\eta_t = \eta_{t-1} + a_t$$

Volatilidad Estocástica

Introduzcamos el proceso estocástico σ_t que representa la desviación estándar al momento $t \geq 0$, el cual supondremos que se ubica en espacio de estados finitos representado por el conjunto $I = \{1, 2, ...k\}$, mismos que puede ser representado como un proceso de saltos de naturaleza no Markoviana.

Este proceso puede ser representado como un proceso Semi-Markoviano, del cual estamos interesados en la probabilidad de migración de un estado i a otro j en un tiempo t, representado por $p_{ij}(t)$.

Volatilidad Estocástica

Este proceso es representado por las siguientes funciones:

- Función de distribución del tiempo de espera.

  $F_i(t) = P(T < t, Y(T) \neq i | Y(0) = i),$

- Función de migración en el salto $(n+1)$

  $p_{ij} = lim_{t\to\infty} P(Y_{n+1}(T) = j, T < t | Y_n(0) = i)$

Volatilidad Estocástica

De esta forma, tenemos que la probabilidad de ocurrencia del "siniestro", dependerá del estado de volatilidad en que se encuentre nuestro proceso, es decir, tenemos un proceso insertado en otro proceso no observable, mas sí estimable, mismo que será de naturaleza no homogénea en el tiempo.

No obstante estos procesos anidados presentan las siguientes dificultades:

- La solución del sistema implica una gran cantidad de ecuaciones.
- No existe solución cerrada.

Volatilidad Estocástica

Así, la solución a nuestro proceso de interés $N(t)$, será aproximado por simulación Montecarlo de dos procesos estocásticos anidados, desde un intante t_0 hasta uno t dado.

Análisis de Caso

Suponga nuevamente la evolución del Dow Jonse del NYSE y definamos nuevamente el "siniestro" como aquellos casos donde la rentabilidad ajustada al momento del cierre se ubique en -2 puntos porcentuales con respecto al día previo.

Análisis de Caso

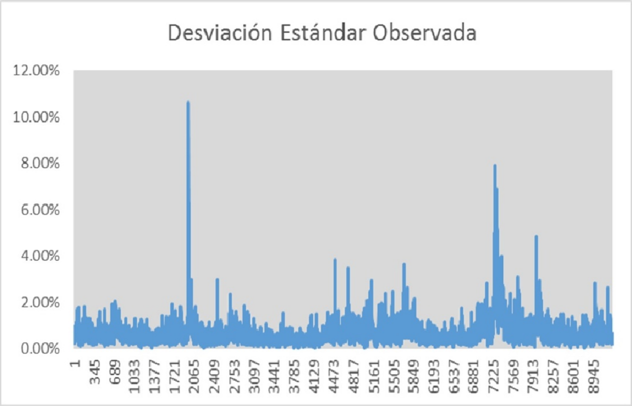
Antes que nada, ajustemos la volatilidad como un modelo $AR(2)$, de tal manera que podamos conocer la periodicidad del fenómeno de estudio, el modelo ajustado resutó en:

$$y_t = 0.003 + 0.07y_{t-1} - 0.04y_{t-2}.$$

Esta ecuación tiene una periodicidad asociada de 3.926, es decir, una perodicidad semanal ajustada por los días festivos, es decir, nuestra σ_t estará dada por la variabilidad observada en los últimos 4 días.

Análisis de Caso

Así, la desviación estándar resultó:



Análisis de Caso

Por otro lado, definamos nuestro especio de estados de la desviación estándar en $I = \{I, II, III, IV, V\}$, donde:

- $I : PrimerQuartil.$
- $II : SegundoQuartil.$
- $III : TercerQuartil.$
- $IV : PrimeramitaddedatosdelcuartoQuartil.$
- $IV : SegundamitaddedatosdelcuartoQuartil.$

Es decir, la evolución de nuestra variable aleatoria $X(t)$ se desarrolla dentro de un Proceso Semi-Markoviano $Y(t)$ de cinco estados.

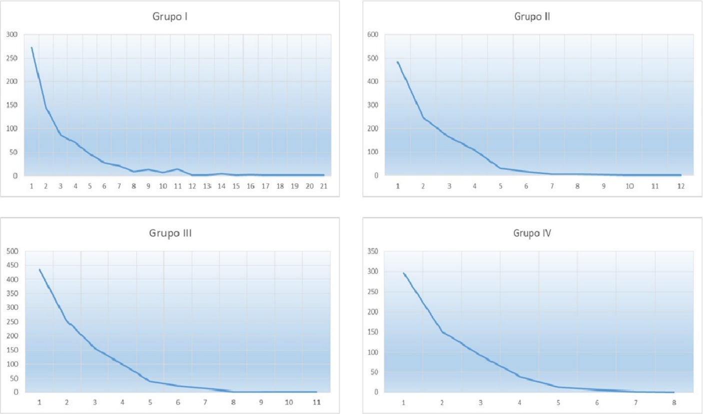
Análisis de Caso

Las probabilidades a estimar serán:

- $E(N(t)|Y(t_0) = I)$, $Var(N(t)|Y(t_0) = I)$
- $E(N(t)|Y(t_0) = II)$, $Var(N(t)|Y(t_0) = II)$
- $E(N(t)|Y(t_0) = III)$, $Var(N(t)|Y(t_0) = III)$
- $E(N(t)|Y(t_0) = IV)$, $Var(N(t)|Y(t_0) = IV)$.

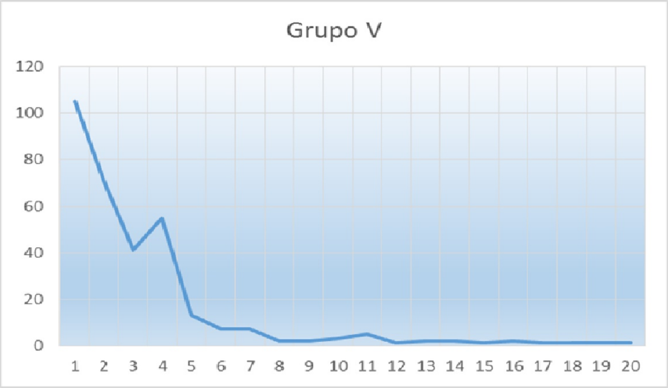
Análisis de Caso

Las gráficas de frecuencia para cada estado resultaron:



Análisis de Caso

Las gráfica para el grupo cinco resultó



Análisis de Caso

De igual manera, cabe mencionar que se encontró evidencia contundente para suponer que la probabilidad de ocurrencia del siniestro tenía memoria a dos pasos para los estados IV y V, por lo que en cada uno de ellos se generaron 4 estados transitorios.

Por ejemplo: La migración de un estado diferente del estado IV hacia el IV, se daba hacia un estado transitorio de un día.

Análisis de Caso

Fijando t = 21, Los resultados obtenidos de la simulación Montecarlo fueron:

Estado	H(21)	Var(N21)
I	0.375	0.5329
II	0.362	0.5175
III	0.426	0.6051
IV	0.585	0.7926
V	0.84	1.0935