



**BUAP**

# RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES BORROSAS MEDIANTE LA INVERSA MOORE-PENROSE

**GABRIEL KANTÚN MONTIEL**  
**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**  
[gkantun@fcfm.buap.mx](mailto:gkantun@fcfm.buap.mx)

**LAURA LIZETH LUNA MARTÍNEZ**  
**UNIVERSIDAD DEL PAPALOAPAN**  
[lau970927@gmail.com](mailto:lau970927@gmail.com)

$$Ax = y$$

# INVERSAS GENERALIZADAS

**Problema general**

Descomposición matricial

Inversa Moore-Penrose

Solución general

Aplicaciones

$$Ax = y$$

Si  $A$  es invertible,

$$x = A^{-1}y$$

## INVERSAS GENERALIZADAS

Problema general

Descomposición matricial

Inversa Moore-Penrose

Solución general

Aplicaciones

Si  $A$  no es invertible,

Sea

$$A_{p \times q} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

De forma que  $A_{11}$  es una matriz de orden  $r \times r$  y rango  $r$

Tomemos

$$G_{q \times p} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## INVERSAS GENERALIZADAS

Problema general

**Descomposición matricial**

Inversa Moore-Penrose

Solución general

Aplicaciones

## Inversa Moore-Penrose

- $AGA = A$
- $GAG = G$
- $(AG)^t = AG$
- $(GA)^t = GA$

Es única.

## INVERSAS GENERALIZADAS

Problema general

Descomposición matricial

**Inversa Moore-Penrose**

Solución general

Aplicaciones



E.H. Moore (1862 – 1932)



R. Penrose (1931 - )

La solución general del sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

Está dado por

$$x = Gb + (I - GA)z$$

Donde  $z$  es arbitrario.

## INVERSAS GENERALIZADAS

Problema general

Descomposición matricial

Inversa Moore-Penrose

**Solución general**

Aplicaciones

- Cadenas de Markov.
- Redes.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales singulares.
- Ecuaciones algebraico-diferenciales.
- Procesamiento de imágenes.

# INVERSAS GENERALIZADAS

Problema general

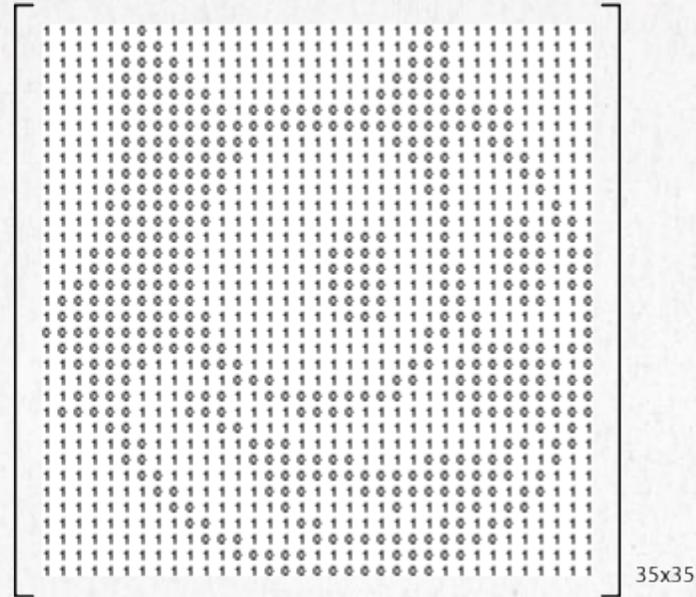
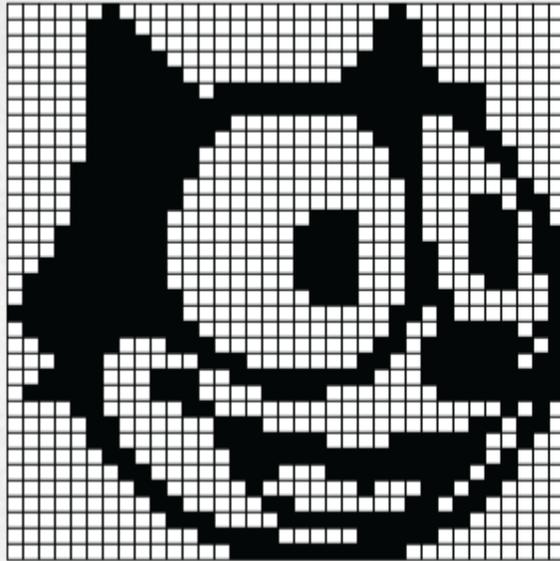
Descomposición matricial

Inversa Moore-Penrose

Solución general

**Aplicaciones**

Una imagen se almacena como una matriz.



# DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

Problema

Modelo teórico

Solución

Ejemplo

Algunos problemas:

- Reconocimiento.
- Mejoras a la imagen.

## **DIFUMINADO LINEAL**

**Imágenes digitales**

Problema

Modelo teórico

Solución

Ejemplo

Cámara en movimiento.



## DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

**Problema**

Modelo teórico

Solución

Ejemplo

Modelo teórico

Dada la imagen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El difuminado lineal de amplitud  $h$  está dado por

$$a_{ij} = \frac{a_{ij}}{h} + \frac{a_{i \ j+1}}{h} + \cdots + \frac{a_{j+h}}{h}$$

## DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

Problema

**Modelo teórico**

Solución

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & \dots & k_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & \dots & k_n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_1 & \dots & k_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{in\_1} \\ x_{in\_2} \\ x_{in\_3} \\ \vdots \\ x_{in\_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{out\_1} \\ x_{out\_2} \\ x_{out\_3} \\ \vdots \\ x_{out\_r} \end{bmatrix}$$

# DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

Problema

**Modelo teórico**

Solución

Ejemplo

## Problema

$$Hx_{in} = x_{out}$$

$$x_{out}(i, j) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{h-1} x_{in}(i, j + k)$$

## DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

Problema

**Modelo teórico**

Solución

Ejemplo

Problema

$$Hx_{in} = x_{out}$$

Solución

$$x_{in} = H^\dagger x_{out}$$

## DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

Problema

Modelo teórico

**Solución**

Ejemplo

## El gato “Chicharito”



## DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

Problema

Modelo teórico

Solución

**Ejemplo**

# DIFUMINADO LINEAL

Imágenes digitales

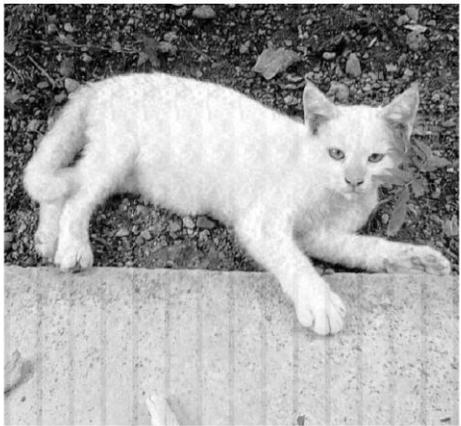
Problema

Modelo teórico

Solución

**Ejemplo**





# DIFUMINADO LINEAL

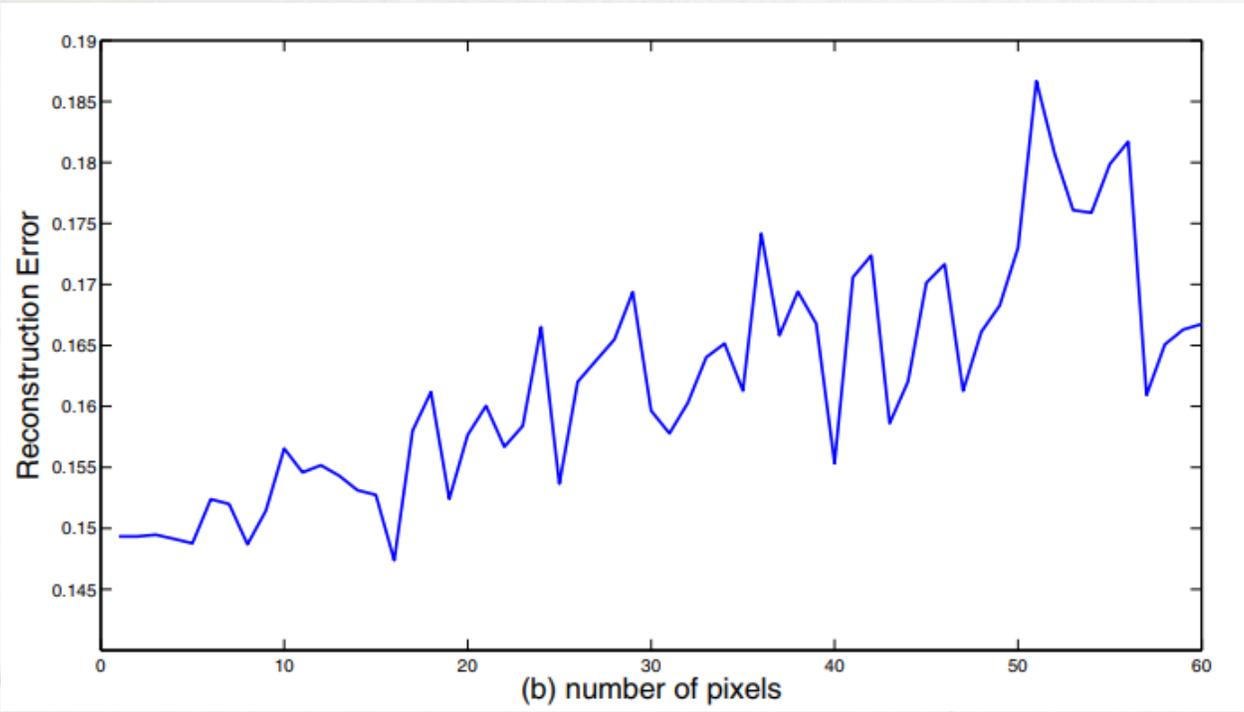
Imágenes digitales

Problema

Modelo teórico

Solución

**Ejemplo**



Predrag Stanimirovic, Igor Stojanovic, Dimitrios Pappas, Spiros Chountasis, Zoran Zdravev. On Removing Blur in Images Using Least Squares Solutions. *Filomat* 30:14 (2016), 3855–3866.

Spiros Chountasis, Vasilios N. Katsikis, and Dimitrios Pappas. Applications of the Moore-Penrose Inverse in Digital Image Restoration. *Mathematical Problems in Engineering* ( 2009)

## **REFERENCIAS**

**Gracias**